



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

Detección de Fallas en Estructuras Civiles Parcialmente
Instrumentadas a través de Observadores de Estado

Tesis que presenta

M.I. Bernardo Gómez González

Para Obtener el Grado de

Doctor en Ciencias

En la Especialidad de

Control Automático

Director de Tesis: Dr. Juan Carlos Martínez García

México, D.F.

Septiembre 2005

אב

Se agradece el apoyo económico recibido por parte del *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología* para la realización de los estudios de doctorado que dan origen al presente documento.

Asimismo, se agradece a los profesores Dr. Alexander S. Pozniak, Dr. Dionisio Bernal, Dr. Eduardo Miranda, Dr. Juan Carlos Martínez, Dr. Luis Alvarez Icaza, Dr. Moisés Bonilla y Dr. Rubén Garrido, por las observaciones y comentarios que hicieron sobre el mismo.

Notación

Símbolos romanos

\mathbf{A}	Matriz de regresores del modelo ARX
\mathcal{A}	Matriz de $n \times n$
A	Matriz del sistema en el espacio de estados
A_m	Matriz diagonal de bloques del sistema en su representación modal
\bar{A}	Matriz del observador
\hat{A}	Matriz identificada del sistema en el espacio de estados
B	Matriz de entradas del sistema en el espacio de estados
B_{0m}	Matriz de entradas del sistema en su representación modal
B_m	Matriz de bloques de entradas del sistema en su representación modal
\bar{B}	Matriz de entradas del observador
\hat{B}_m	Matriz identificada de entradas del sistema en coordenadas modales en el espacio de estado
\hat{B}	Matriz identificada de entradas del sistema en el espacio de estados
$[B_0]$	Matriz de entradas del sistema
\mathbb{C}	Plano Complejo
C	Matriz de salidas del sistema en el espacio de estados

C_{0vm}	Matriz de salidas de velocidades del sistema en su representación modal
C_{0xm}	Matriz de salidas de desplazamientos del sistema en su representación modal
C_m	Matriz de bloques de salidas del sistema en su representación modal
c_i	Amortiguamiento del i -ésimo amortiguador de un sistema masa - resorte - amortiguador
\hat{C}_m	Matriz identificada de salidas del sistema en coordenadas modales en el espacio de estado
\hat{C}	Matriz identificada de salidas del sistema en el espacio de estados
$[C_{0v}]$	Matriz de salidas de velocidades del sistema
$[C_{0x}]$	Matriz de salidas de desplazamientos del sistema
D	Matriz del término directo del sistema en el espacio de estados
E	Esperanza matemática
e	Error calculado
E_m^T	$E_m^T = [I_m \ O_m \ \cdots \ O_m]$
E_r^T	$E_r^T = [I_r \ O_r \ \cdots \ O_r]$
F	Función que permite considerar a las fuerzas no conservativas
f_{ij}	Fuerza en la liga que une a las masas i y j
G	Matriz de ganancias del observador
g	Aceleración de la gravedad
$H(k-1)$	Matriz de bloques de Hankel
H^\dagger	Pseudo-inversa de la matriz de Hankel
H_i^d	Matriz Toeplitz de bloques triangular inferior
h_i	Altura de la i -ésima columna del modelo de un edificio
I	Matriz identidad
\beth	

j	Número imaginario $j = \sqrt{-1}$
\mathbf{K}	Ganancia de Kalman
K	Matriz de rigidez del sistema
$K_{equivalente}$	Matriz de rigidez equivalente del sistema
K_m	Matriz de rigidez modal del sistema
k_i	Rigidez del i -ésimo resorte de un sistema masa - resorte - amortiguador
M	Matriz de masa del sistema
M_m	Matriz de masa modal del sistema
MAC	Coherencia de la amplitud modal
MSV	Valor del modo singular
m_i	Masa de la i -ésima masa de un sistema masa - resorte - amortiguador
\mathcal{O}	Proyección oblicua del espacio renglón de $Y_{i 2i-1}$ a lo largo del espacio renglón de $U_{i 2i-1}$ sobre el espacio renglón de $W_{0 i-1}$
O	Matriz nula
\mathcal{P}	Matriz de observabilidad generalizada
P	Matriz de covarianza en el Método de Mínimos Cuadrados
\mathcal{Q}	Matriz de contrabilidad generalizada
q_{mi}	Desplazamiento modal asociado con el i -ésimo modo
Q_r	Vector de fuerzas externas aplicadas al sistema
q	Desplazamiento modal
\dot{q}	Velocidad modal
\ddot{q}	Aceleración modal
q_r	Vector de coordenadas no generalizadas
\dot{q}_{mi}	Velocidad modal asociada con el i -ésimo modo

q_{m0i}	$q_{m0i} = \xi_i q_{mi} + \dot{q}_{mi}/\omega_i$, donde q_{mi} es el desplazamiento modal asociado con el i -ésimo modo, \dot{q}_{mi} es la velocidad modal asociada con el i -ésimo modo, ω_i es la frecuencia natural de vibración asociada con el i -ésimo modo y ξ_i es el factor de amortiguamiento modal asociado con el i -ésimo modo
R	Matriz ortonormal a S que resulta de la descomposición de valores singulares de la matriz de Hankel $H(0) = R\Sigma S^T$, donde Σ es la matriz de valores singulares
R_n	Matriz formada por las primeras n columnas de R
S	Matriz ortonormal a R que resulta de la descomposición de valores singulares de la matriz de Hankel $H(0) = R\Sigma S^T$, donde Σ es la matriz de valores singulares
S_n	Matriz formada por las primeras n columnas de S
\mathcal{T}	Matriz de transformación
T	Período del sistema
t	Variable temporal
u	Desplazamiento en la base del modelo de un edificio
U, S, V	Matrices de una descomposición de valores singulares
U_f	Entradas futuras $U_{i 2i-1}$
U_f^-	Entradas futuras $U_{i+1 2i-1}$
\dot{u}	Velocidad en la base del modelo de un edificio
\ddot{u}	Aceleración en la base del modelo de un edificio
$\{u\}$	Vector de entradas del sistema
\mathbf{V}	Matriz triangular superior del observador
V	Valor inicial para las entradas de la matriz de covarianza P en el Método de Mínimos Cuadrados
v	Entradas de la matriz V
$\bar{\mathbf{V}}$	Submatriz de la matriz \mathbf{V} después de eliminar las primeras p columnas
\beth	

w	Vector de estado del sistema
W_p	Entradas pasadas (U_p) y salidas pasadas (Y_f)
W_p^+	Entradas pasadas (U_p^+) y salidas pasadas (Y_f^+)
x	Desplazamiento lateral de la i -ésima masa del modelo de un edificio
x_i	Entradas del modelo ARX
\dot{x}	Velocidad lateral de la i -ésima masa del modelo de un edificio
\ddot{x}	Aceleración lateral de la i -ésima masa del modelo de un edificio
x_m	Vector de estado del sistema en coordenadas modales
\bar{x}	Punto de equilibrio
$\{x\}$	Vector de desplazamientos del sistema
$\{\dot{x}\}$	Vector de velocidades del sistema
$\{\ddot{x}\}$	Vector de aceleraciones del sistema
\bar{Y}	Matriz que contiene los parámetros de Markov del Observador
Y	Matriz de salidas del modelo ARX
Y_f	Salidas futuras $Y_{i 2i-1}$
Y_f^-	Salidas futuras $Y_{i+1 2i-1}$
y_i	Salidas (desplazamientos) del modelo ARX
y_m	Vector de salidas del sistema en su representación modal
$\{y\}$	Vector de salidas del sistema
\mathcal{Z}	Proyección ortogonal del espacio renglón de $Y_{i 2i-1}$ sobre la suma de los espacios renglón de $U_{0 2i-1}$ y $Y_{0 i-1}$
Z	Matriz de factores de amortiguamiento modales del sistema

Símbolos griegos

β	Vector de parámetros del modelo ARX
---------	---------------------------------------

$\hat{\beta}$	Vector de parámetros identificados del modelo ARX
δ_{ij}	Desplazamiento relativo entre las masas i y j
$\dot{\delta}_{ij}$	Velocidad relativa entre las masas i y j
$\ddot{\delta}_{ij}$	Aceleración relativa entre las masas i y j
ϕ	Elementos de la matriz de regresores del modelo ARX
Φ	Matriz compuesta por las formas modales o vectores propios de la matriz A de $n \times n$
ϕ	Vector propio asociado a cada valor propio λ
Γ_i	Matriz de observabilidad extendida
$\underline{\Gamma}_i$	Matriz de observabilidad extendida Γ_i , sin las últimas l filas
λ	Factor de olvido
$\hat{\Lambda}$	Matriz diagonal que contiene a los valores propios identificados $\hat{\lambda}$
λ	Valor propio de la matriz A de $n \times n$
Ω	Matriz de frecuencias circulares del sistema
ω	Frecuencia natural de vibración
Ψ	Matriz compuesta por las formas modales o vectores propios del sistema
ψ	Vector propio asociado a cada valor propio del sistema
Σ	Matriz rectangular que contiene los valores singulares de la matriz de Hankel $H(0) = R\Sigma S^T$
σ_i	i -ésimo valor singular de la matriz de Hankel $H(0)$
θ_i	Ángulo de giro de la i -ésima columna respecto del eje vertical
$\dot{\theta}_i$	Velocidad angular de la i -ésima columna respecto del eje vertical
$\ddot{\theta}_i$	Aceleración angular de la i -ésima columna respecto del eje vertical
Ξ	Matriz de amortiguamiento del sistema
\beth	

- ξ_i Factor de amortiguamiento modal asociado con el i -ésimo modo
- Ξ_m Matriz de amortiguamiento modal del sistema
- ζ Vector del error del modelo ARX

Índice general

Notación	v
Índice general	XIII
Índice de cuadros	XVII
Índice de figuras	XXI
Resumen	XXV
Abstract	XXVII
Introducción	XXIX
1. Antecedentes	1
1.1. Cambios en las Frecuencias Modales	2
1.1.1. El Problema Hacia Adelante	2
1.1.2. El Problema Inverso	3
1.2. Cambios en las Formas Modales	3
1.3. Métodos Basados en la Medición Dinámica de la Flexibilidad	3
1.3.1. Comparación de Cambios de Flexibilidad	4
1.3.2. Método de la Revisión de Unidad	4
1.3.3. Método de la Matriz de Error de la Rigidez	4
1.3.4. Efectos de la Flexibilidad Residual	5
1.3.5. Cambios en la Matriz de Rigidez Medida	5
2. Modelado de Estructuras Civiles	7
2.1. Introducción	7
2.2. Modelo 1: Péndulo Invertido con Rigidez Concentrada en las Masas	8
2.3. Modelo 2: Péndulo Invertido con Rigidez Adyacente a las Masas . .	10
2.4. Modelo 3: Edificio de Cortante en Coordenadas Generalizadas . . .	12

2.5. Modelo 4: Edificio de Cortante en Coordenadas No Generalizadas . . .	13
2.6. Conclusiones	15
3. Obtención de Parámetros Modales	17
3.1. Introducción	17
3.2. Planteamiento Teórico	18
3.3. Conclusiones	28
4. Algoritmo ERA-OKID	29
4.1. Introducción	29
4.2. Planteamiento Teórico	30
4.3. Sistema Teórico de Un Grado de Libertad	37
4.3.1. Simulación Utilizando el Sismo de El Centro	38
4.3.2. Simulación Utilizando el Sismo de SCTEO	40
4.4. Sistema Teórico de Tres Grados de Libertad	41
4.4.1. Simulación Utilizando el Sismo de El Centro	43
4.4.2. Simulación Utilizando el Sismo de SCTEO	45
4.5. Edificio Instrumentado	45
4.6. Conclusiones	49
5. Algoritmo Subespacial	51
5.1. Introducción	51
5.2. Planteamiento Teórico	52
5.3. Sistema Teórico de Un Grado de Libertad	54
5.3.1. Simulación Utilizando el Sismo de El Centro	54
5.3.2. Simulación Utilizando el Sismo de SCTEO	55
5.4. Sistema Teórico de Tres Grados de Libertad	57
5.4.1. Simulación Utilizando el Sismo de El Centro	57
5.4.2. Simulación Utilizando el Sismo de SCTEO	58
5.5. Edificio Instrumentado	60
5.6. Conclusiones	61
6. Mínimos Cuadrados para Identificación	63
6.1. Introducción	63
6.2. Planteamiento Teórico	64
6.2.1. Método de Mínimos Cuadrados	64
6.2.2. Planteamiento de los Sistemas de Segundo Orden para la Aplicación del Método de Mínimos Cuadrados	66
6.3. Sistema Teórico de Un Grado de Libertad	70
6.3.1. Simulación Utilizando el Sismo de El Centro	71

6.3.2. Simulación Utilizando el Sismo de SCTEO	79
6.4. Sistema Teórico de Tres Grados de Libertad	79
6.4.1. Simulación Utilizando el Sismo de El Centro	87
6.4.2. Simulación Utilizando el Sismo de SCTEO	88
6.5. Edificio Instrumentado	95
6.6. Conclusiones	102
7. Matrices de Rigidez Equivalentes	105
7.1. Introducción	105
7.2. Planteamiento Teórico	106
7.3. Conclusiones	108
8. Identificación de Fallas	109
8.1. Introducción	109
8.2. Identificación a Partir de Registros Acelerográficos	110
8.3. Identificación a Partir de Simulaciones Generadas de los Registros Acelerográficos	116
8.4. Identificación a Partir de Simulaciones en las que se Generan Condi- ciones de Falla Progresiva	122
8.5. Conclusiones	126
Conclusiones Generales y Perspectivas de Investigación	145
Conclusiones Generales	145
Perspectivas de Investigación	148
A. Fuentes de Información	151
B. Trabajos Publicados	153
C. Trabajos Sometidos	155
Bibliografía	157
Índice alfabético	163

Índice de cuadros

4.1. Período y porcentaje de amortiguamiento crítico, de un sistema de un grado de libertad, identificados con el algoritmo ERA-OKID utilizando el sismo de El Centro.	40
4.2. Valores del error estimado para aceleraciones, velocidades y desplazamientos, de un sistema de un grado de libertad, generados con el algoritmo ERA-OKID utilizando el sismo de El Centro.	41
4.3. Período y porcentaje de amortiguamiento crítico, de un sistema de un grado de libertad, identificados con el algoritmo ERA-OKID utilizando el sismo de SCTEO.	42
4.4. Valores del error estimado para aceleraciones, velocidades y desplazamientos, de un sistema de un grado de libertad, generados con el algoritmo ERA-OKID utilizando el sismo de SCTEO.	42
4.5. Períodos y formas modales del sistema de tres grados de libertad utilizado para las simulaciones con el sismo de El Centro.	44
4.6. Períodos, porcentajes de amortiguamientos críticos modales y formas modales del sistema de tres grados de libertad, identificados con el algoritmo ERA-OKID utilizando el sismo de El Centro.	44
4.7. Períodos y formas modales del sistema de tres grados de libertad utilizado para las simulaciones con el sismo de SCTEO.	45
4.8. Períodos, porcentajes de amortiguamientos críticos modales y formas modales del sistema de tres grados de libertad, identificados con el algoritmo ERA-OKID utilizando el sismo de SCTEO.	46
4.9. Períodos fundamentales del inmueble parcialmente instrumentado.	48
4.10. Parámetros modales identificados, del inmueble parcialmente instrumentado, utilizando el algoritmo ERA-OKID.	48
5.1. Período y porcentaje de amortiguamiento crítico, de un sistema de un grado de libertad, identificados con el algoritmo Subespacial utilizando el sismo de El Centro.	55

5.2.	Valores del error estimado para aceleraciones, velocidades y desplazamientos, de un sistema de un grado de libertad, generados con el algoritmo Subespacial utilizando el sismo de El Centro.	56
5.3.	Período y porcentaje de amortiguamiento crítico, de un sistema de un grado de libertad, identificados con el algoritmo Subespacial utilizando el sismo de SCTEO.	56
5.4.	Valores del error estimado para aceleraciones, velocidades y desplazamientos, de un sistema de un grado de libertad, generados con el algoritmo Subespacial utilizando el sismo de SCTEO.	57
5.5.	Períodos, porcentajes de amortiguamientos críticos modales y formas modales del sistema de tres grados de libertad, identificados con el algoritmo Subespacial utilizando el sismo de El Centro.	58
5.6.	Períodos y formas modales del sistema de tres grados de libertad utilizado para las simulaciones con el sismo de El Centro.	59
5.7.	Períodos y formas modales del sistema de tres grados de libertad utilizado para las simulaciones con el sismo de SCTEO.	59
5.8.	Períodos, porcentajes de amortiguamientos críticos modales y formas modales del sistema de tres grados de libertad, identificados con el algoritmo Subespacial utilizando el sismo de SCTEO.	60
5.9.	Parámetros modales identificados, del inmueble parcialmente instrumentado, utilizando el algoritmo Subespacial.	60
5.10.	Períodos fundamentales del inmueble parcialmente instrumentado.	61
8.1.	Características de los sismos registrados.	110
8.2.	Parámetros modales identificados utilizando el registro del sismo del 13 de enero de 2001.	111
8.3.	Parámetros modales identificados utilizando el registro del sismo del 16 de enero de 2002.	112
8.4.	Parámetros modales identificados utilizando el registro del sismo del 30 de enero de 2002.	113
8.5.	Parámetros modales identificados utilizando el registro del sismo del 18 de abril de 2002.	114
8.6.	Parámetros modales identificados utilizando el registro del sismo del 21 de enero de 2003.	115
8.7.	Normas cuadráticas de las matrices de rigidez equivalentes calculadas para cada sismo.	115
8.8.	Parámetros modales identificados del modelo de elementos finitos utilizando el sismo del 13 de enero de 2001.	117

8.9. Parámetros modales identificados del modelo de elementos finitos utilizando el sismo del 16 de enero de 2002.	118
8.10. Parámetros modales identificados del modelo de elementos finitos utilizando el sismo del 30 de enero de 2002.	119
8.11. Parámetros modales identificados del modelo de elementos finitos utilizando el sismo del 18 de abril de 2002.	120
8.12. Parámetros modales identificados del modelo de elementos finitos utilizando el sismo del 21 de enero de 2003.	121
8.13. Normas cuadráticas de las matrices de rigidez equivalentes del modelo de elementos finitos calculadas para cada sismo.	121
8.14. Parámetros para el modo 1 identificados del modelo de elementos finitos utilizando el sismo del 21 de enero de 2003.	127
8.15. Parámetros para el modo 2 identificados del modelo de elementos finitos utilizando el sismo del 21 de enero de 2003.	128
8.16. Parámetros para el modo 3 identificados del modelo de elementos finitos utilizando el sismo del 21 de enero de 2003.	129
8.17. Normas cuadráticas de las matrices de rigidez equivalentes del modelo de elementos finitos calculadas para cada condición de falla utilizando el sismo del 21 de enero de 2003.	130
8.18. Desplazamientos relativos máximos de entrepiso y normas cuadráticas de las matrices de rigidez equivalentes del modelo de elementos finitos calculadas para cada sismo y cada condición de falla analizada.	143

Índice de figuras

2.1. Modelo 1: Péndulo Invertido con Rigidez Concentrada en las Masas. . .	9
2.2. Modelo 2: Péndulo Invertido con Rigidez Adyacente a las Masas. . .	11
2.3. Modelo 3: Edificio de Cortante en Coordenadas Generalizadas. . . .	12
2.4. Modelo 4: Edificio de Cortante en Coordenadas No Generalizadas. . .	14
6.1. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de El Centro considerando 0% de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.95$	72
6.2. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de El Centro considerando 0% de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.99$	73
6.3. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de El Centro considerando 2% de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.95$	74
6.4. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de El Centro considerando 2% de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.99$	75
6.5. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de El Centro considerando 5% de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.95$	76
6.6. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de El Centro considerando 5% de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.99$	77

6.7. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de El Centro y considerando una disminución del 50 % en la rigidez.	78
6.8. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de SCTEO considerando 0 % de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.95$	80
6.9. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de SCTEO considerando 0 % de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.99$	81
6.10. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de SCTEO considerando 2 % de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.95$	82
6.11. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de SCTEO considerando 2 % de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.99$	83
6.12. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de SCTEO considerando 5 % de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.95$	84
6.13. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de SCTEO considerando 5 % de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.99$	85
6.14. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de SCTEO y considerando una disminución del 50 % en la rigidez.	86
6.15. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales del primer nivel de un sistema de tres grados de libertad, utilizando el sismo de El Centro y considerando 5 % de nivel de ruido blanco.	89

6.16. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales del segundo nivel de un sistema de tres grados de libertad, utilizando el sismo de El Centro y considerando 5 % de nivel de ruido blanco. 90

6.17. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales del tercer nivel de un sistema de tres grados de libertad, utilizando el sismo de El Centro y considerando 5 % de nivel de ruido blanco. 91

6.18. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales del primer nivel de un sistema de tres grados de libertad, utilizando el sismo de SCTEO y considerando 5 % de nivel de ruido blanco. 92

6.19. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales del segundo nivel de un sistema de tres grados de libertad, utilizando el sismo de SCTEO y considerando 5 % de nivel de ruido blanco. 93

6.20. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales del tercer nivel de un sistema de tres grados de libertad, utilizando el sismo de SCTEO y considerando 5 % de nivel de ruido blanco. 94

6.21. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales en la dirección transversal del primer nivel equivalente del edificio parcialmente instrumentado, utilizando el sismo del 21 de enero de 2003. 96

6.22. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales en la dirección transversal del segundo nivel equivalente del edificio parcialmente instrumentado, utilizando el sismo del 21 de enero de 2003. 97

6.23. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales en la dirección transversal del tercer nivel equivalente del edificio parcialmente instrumentado, utilizando el sismo del 21 de enero de 2003. 98

6.24. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales en la dirección longitudinal del primer nivel equivalente del edificio parcialmente instrumentado, utilizando el sismo del 21 de enero de 2003. 99

6.25. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales en la dirección longitudinal del segundo nivel equivalente del edificio parcialmente instrumentado, utilizando el sismo del 21 de enero de 2003.	100
6.26. Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales en la dirección longitudinal del tercer nivel equivalente del edificio parcialmente instrumentado, utilizando el sismo del 21 de enero de 2003.	101
8.1. Espectro de respuesta del sismo del 13 de enero de 2001 en dirección X.	131
8.2. Espectro de respuesta del sismo del 13 de enero de 2001 en dirección Y.	132
8.3. Espectro de respuesta del sismo del 16 de enero de 2002 en dirección X.	133
8.4. Espectro de respuesta del sismo del 16 de enero de 2002 en dirección Y.	134
8.5. Espectro de respuesta del sismo del 30 de enero de 2002 en dirección X.	135
8.6. Espectro de respuesta del sismo del 30 de enero de 2002 en dirección Y.	136
8.7. Espectro de respuesta del sismo del 18 de abril de 2002 en dirección X.	137
8.8. Espectro de respuesta del sismo del 18 de abril de 2002 en dirección Y.	138
8.9. Espectro de respuesta del sismo del 21 de enero de 2003 en dirección X.	139
8.10. Espectro de respuesta del sismo del 21 de enero de 2003 en dirección Y.	140

Resumen

El presente documento contiene la información generada y los resultados obtenidos durante el desarrollo de la investigación doctoral de quien lo suscribe. Se hace una breve revisión del estado del arte en cuanto a identificación de fallas y monitoreo de la salud estructural en estructuras civiles. Asimismo, como parte de la investigación doctoral, se incursiona en el modelado de estructuras civiles bajo las perspectivas del Control Automático y de la Ingeniería Estructural buscando encontrar un lenguaje común entre ambas disciplinas.

La detección e identificación de fallas en cualquier sistema mecánico puede resolverse en dos ambientes distintos a saber: en el espacio de estados y mediante la ecuación diferencial de segundo orden que define su dinámica. Por tal motivo se estudian y evalúan dos algoritmos de realización en el espacio de estados, los cuales proporcionan información útil para generar posteriormente criterios de detección de fallas; los dos algoritmos estudiados en esta investigación son el denominado *ERA-OKID* y el algoritmo de identificación *subespacial*. En cuanto al uso de la ecuación diferencial de segundo orden que describe la dinámica de sistemas mecánicos como los edificios, se emplea el *Método de Mínimos Cuadrados* como metodología para la identificación de los parámetros físicos que caracterizan a las estructuras en estudio.

La evaluación de las tres metodologías de identificación se lleva a cabo sobre dos modelos académicos y sobre un edificio real parcialmente instrumentado. En los dos primeros casos se utilizan simulaciones que se generan utilizando los sismos de El Centro y SCTEO, mientras que para el edificio real se utilizan los registros de los cinco sismos de mayor intensidad que han sido captados por la instrumentación con que cuenta el inmueble. Los resultados obtenidos con los modelos académicos no son concluyentes en cuanto a las ventajas que representa utilizar preferentemente alguno de los tres algoritmos debido a los buenos resultados obtenidos con todos ellos, sin embargo, a partir de los resultados obtenidos en el edificio real, se observan ventajas importantes en el uso del algoritmo *Subespacial*, por lo que en la parte final de la investigación es este el algoritmo que se utiliza.

La última parte del trabajo realizado consiste en la utilización del algoritmo de identificación *Subespacial*, en conjunto con una propuesta por parte del autor para

obtener matrices de rigidez equivalentes, de tal forma que se genera un criterio para la detección de fallas en un inmueble real parcialmente instrumentado mediante la variación de la norma cuadrática de las matrices de rigidez equivalentes calculadas. La propuesta se sustenta sobre los resultados de simulaciones en los que se genera un patrón de fallas progresivas en la estructura del edificio en estudio, para lo que se utiliza un modelo de elementos finitos que es excitado con el registro escalado del sismo de mayor intensidad captado hasta el día de hoy por la instrumentación parcial instalada en el inmueble.

Por último, se presentan las conclusiones de los trabajos realizados y se proponen posibles líneas de investigación a seguir.

Abstract

This report presents the information and the results obtained from the author's PhD research. A brief review of the state of art in fault detection and identification techniques, and building health monitoring is presented. In the same way, the use of Automatic Control and Structural Engineering techniques to model civil structures is reported; the followed procedures allow to look for a common language between both disciplines.

Fault detection and identification techniques for all mechanic systems could be represented within the state space or by the second order differential equation that describes their dynamics. For that reason, the *ERA-OKID* and *subspace* identification algorithms are evaluated here in order to obtain a realization of the studied system. Once the realization is obtained, it is proposed a fault detection criteria. On the other hand, the *Least Squares Method* is used with the second order differential equation that describes the system's dynamics in order to identify the structure's parameters.

The three identification methodologies are evaluated with two academic models and with a real building having a partial seismic instrumentation. The academic models are identified via simulations based on the El Centro and SCTEO earthquakes, while the real building is identified using the seismic records of the five earthquakes with highest intensity that have been registered by the seismic instrumentation. The good academic models results obtained with the three methodologies did not allow to define any advantages between them, however, the excellent real building subspace identification results show that this kind of algorithms is the best one in order to continue with the final research.

The *Subspace* identification algorithm and an author's proposal for the equivalent stiffness matrices computation are applied in order to obtain a fault detection criteria for buildings with partial seismic instrumentation. The proposed fault detection criteria is based on the equivalent stiffness matrices square norm's change. The proposal is tested using the real building finite element model with progressive stiffness and strength degradation, due to the action at the model base of the scaled highest seismic record registered by the seismic instrumentation installed in

the building.

Finally, the research conclusions and possible investigation perspectives are presented.

Introducción

El presente documento tiene como objetivo el hacer un recuento del trabajo desarrollado por el autor en el campo de la detección de fallas en estructuras civiles. Con la información recopilada en este documento se pretende dar una idea general, pero a la vez clara, de los avances logrados hasta el momento en un campo de estudio que, hasta fechas recientes, ha sido poco desarrollado en el ámbito de la Ingeniería Civil mexicana. Si bien los resultados obtenidos son apenas una muestra de lo mucho que hay por hacer, en sí mismos representan la trascendencia de la investigación doctoral realizada por el autor.

En los capítulos que siguen se podrá encontrar la historia de la investigación desarrollada. En primer término, el lector encontrará el enfoque que algunos investigadores le han venido dando, a lo largo de dos décadas, al estudio de la identificación y detección de fallas en estructuras civiles, esta revisión de métodos y bibliografía se presenta en el Capítulo 1, llamado *Antecedentes*. En el Capítulo 2, llamado *Modelado de Estructuras Civiles*, se reflexiona sobre la importancia de tener un lenguaje común cuando dos o más disciplinas de la ciencia tratan de interactuar, para ello se presenta el estudio realizado para el modelado de estructuras civiles desde los puntos de vista del Control Automático y la Ingeniería Estructural; los resultados obtenidos demuestran que ambas disciplinas tienen más en común de lo que a primera instancia se puede pensar. A partir de los buenos resultados obtenidos en el capítulo anterior, se decidió incursionar en algoritmos en el espacio de estados ampliamente utilizados en el Control Automático, y de cuyas ventajas aún no se hace un uso pleno en la Ingeniería Estructural; el estudio realizado con estos algoritmos se muestra en los Capítulos 4 y 5; sin embargo, para poder aprovechar los resultados obtenidos con dichos algoritmos es necesario introducir previamente la teoría sobre los parámetros modales que definen el comportamiento de una estructura, es por ello que se introduce el Capítulo 3, llamado *Obtención de Parámetros Modales*, del cual se obtendrán las bases teóricas para las aplicaciones prácticas de los capítulos que le siguen. Una vez preparado el camino a seguir, en los Capítulos 4 y 5 se muestra cómo se puede llevar a cabo la identificación de sistemas mecánicos en el espacio de estados. En el primero de ellos se evalúa el algoritmo llamado *ERA-*

OKID, mientras que en el segundo se trata el uso del algoritmo *Subespacial*. Si bien los dos algoritmos presentados son un ejemplo de la experiencia adquirida por el autor en Control Automático, en sus fundamentos teóricos se encuentran diferencias notables en las que bien vale la pena detenerse para comprender mejor las bondades de cada uno de ellos. No obstante los buenos resultados obtenidos en estos capítulos, fue importante incursionar en la identificación de los sistemas en estudio en un ambiente más natural para el ingeniero civil, motivo por el cual se realiza la puesta a punto del método de mínimos cuadrados sobre la ecuación diferencial de segundo orden que define el movimiento de este tipo sistemas, los resultados se muestran en el Capítulo 6, denominado *Método de Mínimos Cuadrados para Identificación*.

En los últimos tres capítulos recién descritos, se trabaja la identificación de sistemas bajo la perspectiva de la identificación y detección de fallas; para lo cual fue necesario utilizar modelos académicos comunes a todos ellos, que describen estructuras de uno y tres grados de libertad sometidos a una excitación en su base. El objetivo de utilizar estos modelos académicos es el de comparar el resultado de los diferentes algoritmos bajo condiciones totalmente controladas y conocidas. Una vez que se avanzó sobre esta línea, el siguiente paso, no del todo natural, en la búsqueda de un procedimiento para la detección de fallas en estructuras civiles, es el instrumentar lo ya probado bajo condiciones controladas, en un sistema real; es decir, sobre una edificación susceptible de ser identificada en sus parámetros estructurales básicos. Lo anterior se logró aplicando los algoritmos de identificación en un inmueble parcialmente instrumentado en la Ciudad de México. Con ayuda de la historia de aceleración captada en el inmueble para el sismo de mayor intensidad registrado hasta el momento por la instrumentación instalada, se logra identificar los parámetros modales del inmueble y, con base en los resultados obtenidos en este problema real, se decidió continuar la investigación bajo el esquema del algoritmo *subespacial*.

El lograr obtener los parámetros modales, de los tres modelos estudiados, es un primer paso en la búsqueda de un procedimiento para la detección de fallas en estructuras civiles parcialmente instrumentadas. Se requiere de un paso adicional para generar un criterio que establezca el nivel de salud estructural que presenta el inmueble. Por tal motivo, antes de pasar a la investigación sobre la detección de fallas progresivas en el modelo del edificio real, se presenta el Capítulo 7, en el que se hace una propuesta para obtener matrices de rigidez equivalentes del edificio real, a partir de la realización utilizando datos generados por la instrumentación parcial, que permitan establecer criterios de identificación y detección de fallas; el capítulo en cuestión se ha denominado *Propuesta para la Obtención de Matrices de Rigidez Equivalentes*.

El punto culminante de la investigación doctoral que se presenta en este do-

cumento se concentra en el Capítulo 8, denominado *Identificación de Fallas con Instrumentación Parcial*, en él se pueden encontrar los resultados obtenidos por el autor en la identificación de los parámetros modales y de matrices de rigidez equivalentes del edificio parcialmente instrumentado, bajo el supuesto de un deterioro progresivo en el inmueble provocado por daños en sus elementos estructurales. En primer término se procede a obtener los parámetros modales y matrices de rigidez equivalentes, utilizando las historias de aceleración de los cinco sismos de mayor intensidad captados hasta el día de hoy por la instrumentación sísmica con la que se cuenta; esta identificación se lleva a cabo de dos formas distintas, en la primera de ellas se utilizan las historias de aceleración registradas en los niveles instrumentados, en la segunda se utilizan las historias de aceleración captadas en la base del inmueble para excitar un modelo de elementos finitos de la estructura en cuestión. La realización de ambas identificaciones tiene como objetivo el validar el uso del modelo de elementos finitos del inmueble para simular fallas en el mismo. La siguiente y última etapa consiste en utilizar las simulaciones generadas a partir del sismo de mayor intensidad actuando sobre el modelo de elementos finitos en el que se va modelando al inmueble con diferentes etapas de falla progresiva. Los resultados muestran la dificultad de establecer un criterio de detección de fallas mediante la observación del cambio de rigidez de estructuras tan complejas como las edificaciones civiles, por lo que se plantea la necesidad de complementar las técnicas empleadas con observaciones del comportamiento de otras variables en la respuesta de las estructuras civiles.

Como última parte del reporte de la investigación doctoral, se presentan las conclusiones generales del trabajo realizado y se plantean algunas líneas de investigación susceptibles de ser desarrolladas en futuras investigaciones.

Por último, antes de la bibliografía general de este reporte, se presentan tres apéndices. En el primero de ellos, Apéndice A, se hace una revisión de las fuentes de información recomendadas para el seguimiento de este trabajo, mismas que pueden ser utilizadas por el lector interesado en profundizar en esta línea de investigación. En el Apéndice B se enlistan los trabajos publicados en congresos internacionales; estas publicaciones son parte de los productos generados en esta investigación. Finalmente, en el Apéndice C, se enlistan los trabajos sometidos a revistas internacionales, los cuales resumen y presentan los principales resultados reportados en el presente documento.

Capítulo 1

Antecedentes

El enfoque principal de este trabajo de investigación gira alrededor de la identificación y detección de fallas, en estructuras civiles parcialmente instrumentadas, mediante la observación de cambios en la respuesta del sistema en vibración. Diversos investigadores alrededor del mundo han incursionado en este campo utilizando diferentes técnicas de análisis. Los análisis que han utilizado incluyen la observación de cambios en las frecuencias modales, cambios en las formas modales registradas y cambios en los coeficientes de flexibilidad medidos en la estructura. Asimismo, se han desarrollado investigaciones utilizando métodos que consideran la obtención de nuevas matrices del sistema como las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento, la obtención de la respuesta no lineal del sistema, y la detección de daños utilizando redes neuronales artificiales. El tipo de estructuras en las que se han desarrollado estas investigaciones son variados, entre ellos se incluyen vigas, armaduras, placas, cascarones, puentes, plataformas marinas, estructuras aeroespaciales, y estructuras compuestas [11].

El ideal que se busca en el proceso de monitoreo de la salud estructural de un sistema, como las estructuras civiles, es el obtener un procedimiento robusto que sea capaz de identificar el daño que se está produciendo desde sus etapas iniciales, localizar el daño de acuerdo con la resolución que proveen los sensores de medición, hacer una estimación de la severidad del daño, y predecir la vida útil remanente de la estructura. Además, se busca que la metodología empleada sea lo más automatizada posible y, que en su puesta a punto más desarrollada, no dependa del criterio personal del usuario o de un modelo analítico de la estructura en estudio. Sin embargo, dada la complejidad del tipo de estructuras en donde se busca utilizar estas metodologías, en una meta inicial se puede pensar en utilizar mediciones de la estructura sin daño para utilizarlas como punto de comparación en futuras mediciones de la respuesta de la misma [11].

De forma más puntual se pueden establecer los cuatro niveles de identificación de fallas propuesto por [40] para clasificar a los métodos de identificación de fallas:

Nivel 1: Determinación de la presencia de daño en la estructura.

Nivel 2: Determinación de la localización geométrica del daño.

Nivel 3: Cuantificación de la severidad del daño.

Nivel 4: Predicción de la vida de servicio de la estructura.

Cada uno de estos niveles de identificación de fallas requieren un grado de refinamiento mayor de los métodos de identificación utilizados, conforme se avanza de uno a otro nivel. Motivo por el cual a continuación se dará una semblanza, obtenida de la referencia [11], de los requerimientos y del tipo de análisis que se han venido empleando para cada uno de ellos.

1.1. Cambios en las Frecuencias Modales

Los métodos que se basan en cambios de las frecuencias modales tienen limitaciones prácticas importantes, ya que, al constituir éstas una propiedad global de la estructura, no es muy claro que cambios en este tipo de propiedades sean útiles para determinar más allá de la mera existencia de daños. Por lo anterior, es de esperarse que los métodos basados en este criterio, no sean capaces de proporcionar información espacial de los cambios en la estructura sobre la que se implementan.

Bajo este criterio de identificación se han desarrollado métodos que caen en dos categorías principales, las cuales se han designado como *El Problema Hacia Adelante* y como *El Problema Inverso*.

1.1.1. El Problema Hacia Adelante

Estos métodos caen usualmente en el Nivel 1 (determinación de la presencia de daño en la estructura) de la identificación de daños y consisten en calcular el cambio en las frecuencias modales a partir de un tipo de daño conocido. Comúnmente el daño se modela matemáticamente y posteriormente, para determinar el daño, las frecuencias medidas son comparadas con las frecuencias predichas. Resultados interesantes sobre estructuras civiles de grandes dimensiones, la mayoría de ellas plataformas marinas, utilizando metodologías de este tipo se pueden encontrar en las referencias [2], [5], [8], [12], [22], [28], [34], [36], [49], [52], [53].

1.1.2. El Problema Inverso

Estos métodos se ubican por lo general en los Niveles 2 (determinación de la localización geométrica del daño) y 3 (cuantificación de la severidad del daño) de la identificación de daños, consisten en calcular los parámetros de daño como pudieran ser la longitud y/o localización de una grieta, a partir de cambios en las frecuencias. En este caso, los investigadores que han llegado a la puesta a punto de su propuesta en estructuras civiles de grandes dimensiones son pocos, entre ellos se pueden contar los trabajos descritos en las referencias [3] y [43].

1.2. Cambios en las Formas Modales

Son numerosos los investigadores que han utilizado este criterio para desarrollar métodos de identificación de fallas, buena parte de ellos usan el *criterio de seguro modal* (MAC en sus siglas en inglés) para determinar el nivel de correlación entre los modos para determinar la presencia de daño. Trabajos representativos que utilizan este criterio se pueden encontrar en las referencias [23], [45] y [51].

Una alternativa de utilización de las formas modales para obtener información espacial sobre los cambios en la respuesta del sistema, es el utilizar *las derivadas de las formas modales*, tales como la curvatura. Los resultados obtenidos mediante este criterio son extremos, la diferencia depende básicamente del tipo de señal que se utiliza; sin ser concluyentes se puede decir que los resultados no han sido muy buenos cuando se utilizan datos experimentales, ya que uno de los factores más importantes en la utilización de estos métodos es la selección de cuáles modos utilizar para el análisis (ver [24] y [42]), ya que la información que se pueda obtener de cualesquiera de los modos utilizados, dependerá de la localización de los sensores de medición respecto a la amplitud de la forma modal asociada.

1.3. Métodos Basados en la Medición Dinámica de la Flexibilidad

Otra clase de métodos utilizados para la identificación de daños se basan en el uso de la matriz de flexibilidades medida dinámicamente para estimar cambios en el comportamiento estático de la estructura. Debido a que la matriz de flexibilidades está definida como la inversa de la matriz estática de rigideces, puede emplearse para relacionar las fuerzas estáticas aplicadas y el desplazamiento resultante en la estructura. Por lo tanto, cada columna de la matriz de flexibilidades representa

el patrón de desplazamientos de la estructura asociada con una fuerza unitaria aplicada en el grado de libertad asociado.

La matriz de flexibilidades medida es estimada a partir de los modos y formas modales normalizados respecto de la masa. Esta formulación es aproximada, debido al hecho de que sólo los primeros modos de la estructura (normalmente los modos con frecuencias más bajas) pueden ser medidos. La obtención de la matriz de flexibilidades completa requeriría del cálculo de todos los modos y formas modales de la estructura.

Estos métodos tratan la problemática concernida de diferentes maneras, a saber: *Comparación de Cambios de Flexibilidad*, *Método de la Revisión de Unidad*, *Método de la Matriz de Error de la Rigidez*, *Efectos de la Flexibilidad Residual* y *Cambios en la Matriz de Rigidez Medida*.

1.3.1. Comparación de Cambios de Flexibilidad

El uso de la medición de la flexibilidad como índice para indicar la integridad relativa de puentes ha sido utilizado por diversos autores, [1], [31] y [48]; el resto de los autores han instrumentado la metodología en sistemas estructurales menos complejos.

1.3.2. Método de la Revisión de Unidad

Este método está basado en la relación de la pseudoinversa entre la matriz de flexibilidades medida dinámicamente y la matriz de rigidez de la estructura. Se establece un error que mide el grado en el que la relación de la pseudoinversa es satisfecha. Uno de los trabajos representativos de esta metodología se encuentra en [26].

1.3.3. Método de la Matriz de Error de la Rigidez

Este método se basa en el cálculo de una matriz de error que es función del cambio de la flexibilidad en la estructura y de la matriz de rigidez de la estructura sin daño. El trabajo reportado en [18] demuestra la dependencia de este método respecto del tipo de reducción que se aplique a la matriz, y al número de modos que se utilicen para formar a la matriz de flexibilidades; el autor compara diferentes procedimientos para llevar a cabo la reducción de la matriz.

1.3.4. Efectos de la Flexibilidad Residual

La matriz de flexibilidad residual representa la contribución de los modos que quedan fuera del ancho de banda de medición, para la matriz de flexibilidad, de tal suerte que es posible relacionar a la matriz de flexibilidad “real” con los modos medidos y con la flexibilidad residual. Un ejemplo de cómo se utiliza esta metodología se puede encontrar en [10].

1.3.5. Cambios en la Matriz de Rigidez Medida

Una variante en el uso de la matriz de flexibilidad medida dinámicamente es la utilización de la matriz de rigidez medida dinámicamente, ésta se define como la pseudoinversa de la matriz de flexibilidad medida dinámicamente. Los trabajos en [38] y [41] muestran resultados obtenidos con este tipo de metodología.

Nota 1.1 *Como se puede observar en la breve revisión bibliográfica que se ha presentado, la inquietud por llevar a cabo el monitoreo de la salud estructural de obras civiles es algo que se ha venido desarrollando constantemente en los últimos 20 años a nivel mundial. No obstante lo anterior, en la Ciudad de México sólo unos cuantos edificios han sido instrumentados, principalmente por limitaciones de tipo económico, y muy pocos estudios se han realizado en este campo de la ciencia. Por otro lado, aún los inmuebles que se encuentran instrumentados, no cuentan con la cantidad de sensores suficientes para llevar a cabo un monitoreo adecuado de su comportamiento estructural, con alguno de los métodos propuestos por los diversos autores citados, por lo que existe la necesidad de plantear metodologías que permitan obtener la mayor cantidad de información posible para desarrollar esta tarea bajo las condicionantes que una instrumentación parcial impone.*

Capítulo 2

Modelado de Estructuras Civiles

2.1. Introducción

El primer trabajo desarrollado en el marco de la investigación doctoral aquí reportada fue en el modelado matemático de estructuras civiles, buscando aplicar en ellas las técnicas de detección de fallas desarrolladas anteriormente para robots (esto es cadenas cinemáticas controladas). Una de las premisas fue lograr que los modelos fueran adecuados para aplicar dichas técnicas, pero que a su vez representaran el comportamiento físico de estructuras flexibles. Una parte de este desarrollo fue el buscar conciliar los conceptos que, sobre las estructuras flexibles, se tienen en el campo del Control Automático y en la dinámica estructural. Como es sabido en el medio de la Ingeniería Estructural, las estructuras flexibles son *“aquellas cuyas propiedades mecánicas incluyen vibraciones periódicas con algunas frecuencias dominantes, resonancia, y modos naturales de vibración”* [16], mientras que desde el punto de vista del Control Automático, una estructura flexible es *“un sistema lineal con propiedades oscilatorias caracterizadas por una amplificación fuerte a señales armónicas con ciertas frecuencias, con estados débilmente correlacionados y cuyos polos complejos conjugados tienen partes reales pequeñas”* [16].

A continuación se desarrollan cuatro modelos matemáticos para cuatro formas diferentes de concebir una estructura civil tal como pudiera ser un edificio común. En todos ellos se limita el desarrollo a sistemas con tres grados de libertad sobre una base deslizante, buscando con ello simular el comportamiento de un edificio de tres niveles sujeto a la excitación sísmica. La filosofía del modelado utilizada fue la de Euler-Lagrange por medio de la obtención de la coenergía cinética T y la energía potencial V para aplicar la ecuación de Lagrange, la cual establece que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r} = Q_r, \quad r = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

donde Q_r es el vector de las fuerzas externas aplicadas al sistema y F una función que permite considerar a las fuerzas no conservativas que se encuentran presentes en el sistema, la cual básicamente denotará al amortiguamiento [32] y [33]; q_r representa al vector de coordenadas generalizadas y t denota como es costumbre la variable temporal. Cabe mencionar que lo reportado en este capítulo fue publicado en [39].

2.2. Modelo 1: Péndulo Invertido con Rigidez Concentrada en las Masas

El modelo 1 es el característico del modelado de robots [44] (ver figura 2.1, en la que m_i denota la i -ésima masa, k_i denota la rigidez del i -ésimo resorte, c_i denota el amortiguamiento del i -ésimo amortiguador, h_i denota la altura de la i -ésima columna y θ_i denota el ángulo de giro de la i -ésima columna respecto del eje vertical). Se basa en el concepto de péndulo invertido sobre el que actúa la gravedad, aunque en este caso se consideran además resortes y amortiguadores rotacionales concentrados en las masas que buscan representar a la rigidez y amortiguamiento provisto por los elementos verticales en los edificios.

Las ecuaciones que se obtienen después de desarrollar la ecuación (2.1) para este modelo presentan términos no lineales. Si se considera que las deformaciones se mantendrán pequeñas, es posible linealizar el sistema de ecuaciones obtenido, tras lo cual el sistema de ecuaciones resultante se muestra en la ecuación (2.2) [39].

□

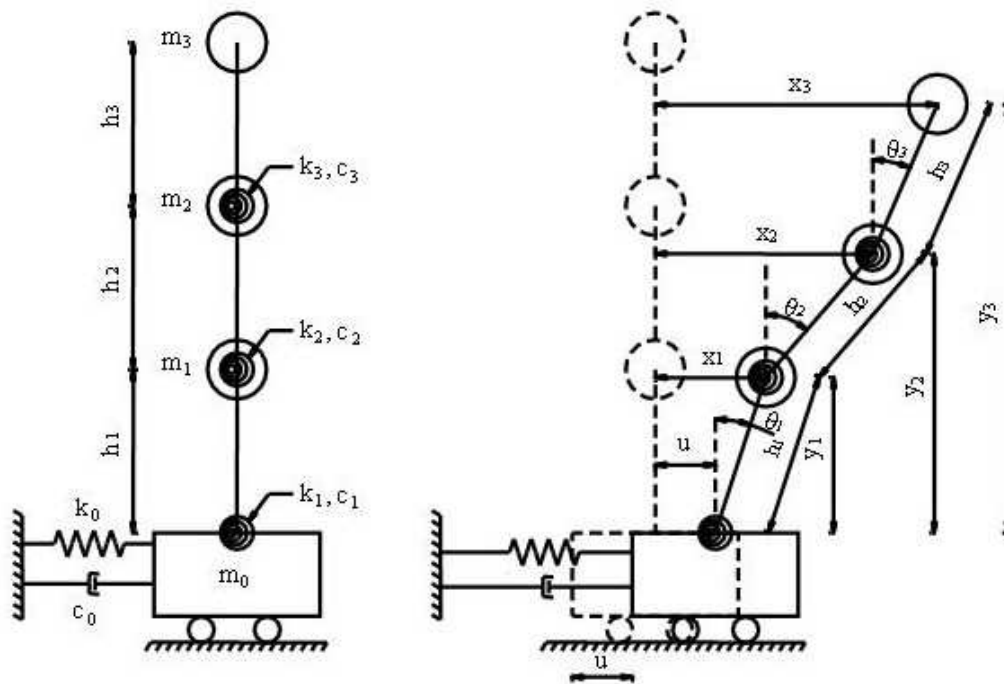


Figura 2.1: Modelo 1: Péndulo Invertido con Rigidez Concentrada en las Masas.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^3 m_i & (\sum_{i=1}^3 m_i) h_1 & (\sum_{i=2}^3 m_i) h_2 & m_3 h_3 \\ (\sum_{i=1}^3 m_i) h_1 & (\sum_{i=1}^3 m_i) h_1^2 & (\sum_{i=2}^3 m_i) h_1 h_2 & m_3 h_1 h_3 \\ (\sum_{i=2}^3 m_i) h_2 & (\sum_{i=2}^3 m_i) h_1 h_2 & (\sum_{i=2}^3 m_i) h_2^2 & m_3 h_2 h_3 \\ m_3 h_3 & m_3 h_1 h_3 & m_3 h_2 h_3 & m_3 h_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} k_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \\
& \begin{Bmatrix} 0 \\ (\sum_{i=1}^3 m_i) g h_1 \theta_1 \\ (\sum_{i=2}^3 m_i) g h_2 \theta_2 \\ m_3 g h_3 \theta_3 \end{Bmatrix}. \quad (2.2)
\end{aligned}$$

2.3. Modelo 2: Péndulo Invertido con Rigidez Adyacente a las Masas

El modelo 2 (ver figura 2.2) es similar al modelo 1 salvo que en este caso los resortes y amortiguadores rotacionales no se encuentran concentrados en las masas, sino que se localizan sobre las mismas.

En la ecuación (2.3) [39] se muestra el sistema de ecuaciones linealizado que describe el comportamiento de este modelo.

□

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^3 m_i & (\sum_{i=1}^3 m_i) h_1 & (\sum_{i=2}^3 m_i) h_2 & m_3 h_3 \\ (\sum_{i=1}^3 m_i) h_1 & (\sum_{i=1}^3 m_i) h_1^2 & (\sum_{i=2}^3 m_i) h_1 h_2 & m_3 h_1 h_3 \\ (\sum_{i=2}^3 m_i) h_2 & (\sum_{i=2}^3 m_i) h_1 h_2 & (\sum_{i=2}^3 m_i) h_2^2 & m_3 h_2 h_3 \\ m_3 h_3 & m_3 h_1 h_3 & m_3 h_2 h_3 & m_3 h_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} k_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ (\sum_{i=1}^3 m_i) g h_1 \theta_1 \\ (\sum_{i=2}^3 m_i) g h_2 \theta_2 \\ m_3 g h_3 \theta_3 \end{Bmatrix}. \tag{2.3}$$

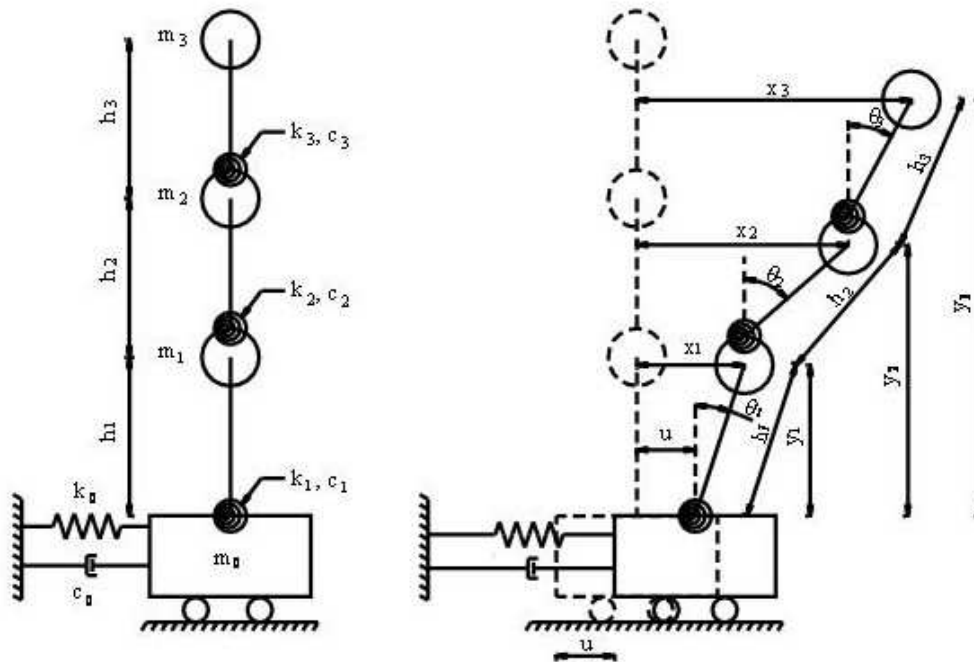


Figura 2.2: Modelo 2: Péndulo Invertido con Rigidez Adyacente a las Masas.

2.4. Modelo 3: Edificio de Cortante en Coordenadas Generalizadas

El modelo 3 es el característico del modelado de estructuras civiles tales como edificios (ver figura 2.3, en la que m_i denota la i -ésima masa, k_i , c_i y h_i denotan la rigidez, amortiguamiento y altura de la i -ésima columna respectivamente), los cuales poseen un número muy elevado de grados de libertad. En la práctica los grados de libertad se simplifican utilizando la consideración de edificio de cortante, el cual considera para el desplazamiento total únicamente a los desplazamientos en sentido horizontal de los niveles y se desprecian a los desplazamientos verticales generados a partir de las rotaciones en la base de las columnas [7], [37] y [46]. Sin embargo, a pesar de que los desplazamientos verticales de las masas son despreciados, el efecto de la gravedad se considera a través del efecto $P - \Delta$, el cual es un par de segundo orden generado por la acción del peso de cada nivel al desplazarse horizontalmente [7], [37] y [46]. Por otro lado, el sistema de coordenadas en el que se desarrollan las ecuaciones es el de coordenadas generalizadas.

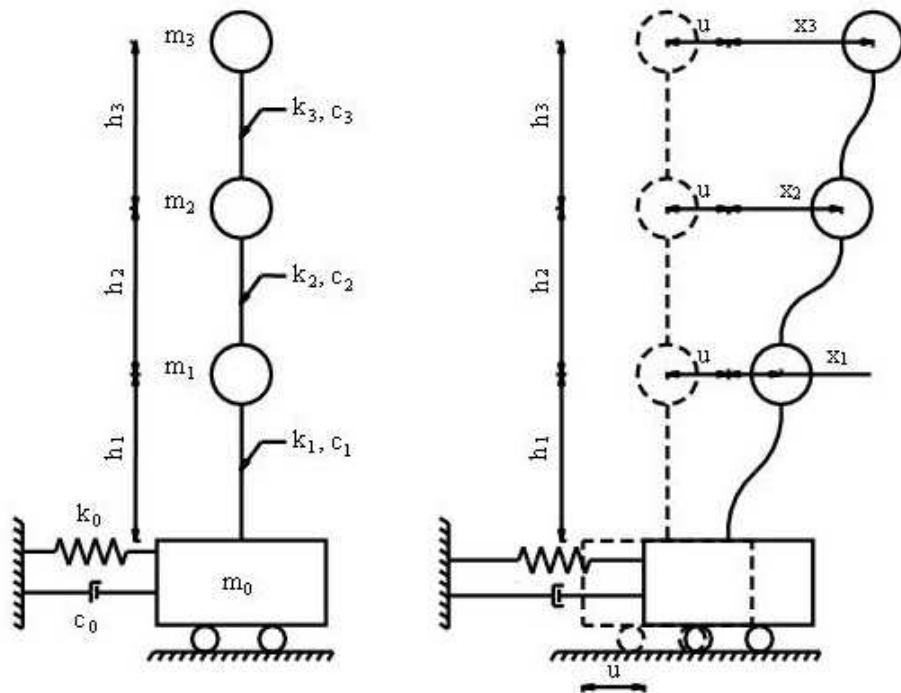


Figura 2.3: Modelo 3: Edificio de Cortante en Coordenadas Generalizadas.

En el caso de este modelo las ecuaciones que se obtienen después de aplicar a

□

la ecuación (2.1) son lineales y se pueden escribir directamente de forma matricial [39] como se muestra en la ecuación (2.4).

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^3 m_i & (\sum_{i=1}^3 m_i) & (\sum_{i=2}^3 m_i) & m_3 \\ (\sum_{i=1}^3 m_i) & (\sum_{i=1}^3 m_i) & (\sum_{i=2}^3 m_i) & m_3 \\ (\sum_{i=2}^3 m_i) & (\sum_{i=2}^3 m_i) & (\sum_{i=2}^3 m_i) & m_3 \\ m_3 & m_3 & m_3 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} k_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \\
 & \begin{Bmatrix} 0 \\ \left(\frac{\sum_{i=1}^3 m_i}{h_1} \right) gx_1 \\ \left(\frac{\sum_{i=2}^3 m_i}{h_2} \right) gx_2 \\ \left(\frac{m_3}{h_3} \right) gx_3 \end{Bmatrix}. \tag{2.4}
 \end{aligned}$$

2.5. Modelo 4: Edificio de Cortante en Coordenadas No Generalizadas

El modelo 4 (ver figura 2.4) es similar al modelo 3 en todas las consideraciones, sin embargo, en este caso el sistema de coordenadas utilizado para desarrollar las ecuaciones es un sistema de coordenadas no generalizado, es decir, las diferentes coordenadas no son independientes de las variaciones que se lleguen a presentar en otras coordenadas. Esta variación se considera ya que es en este tipo de coordenadas como se obtienen las ecuaciones en el ámbito de la dinámica estructural.

La ecuación que describe al comportamiento dinámico de este modelo se presenta en la ecuación (2.5) [39].

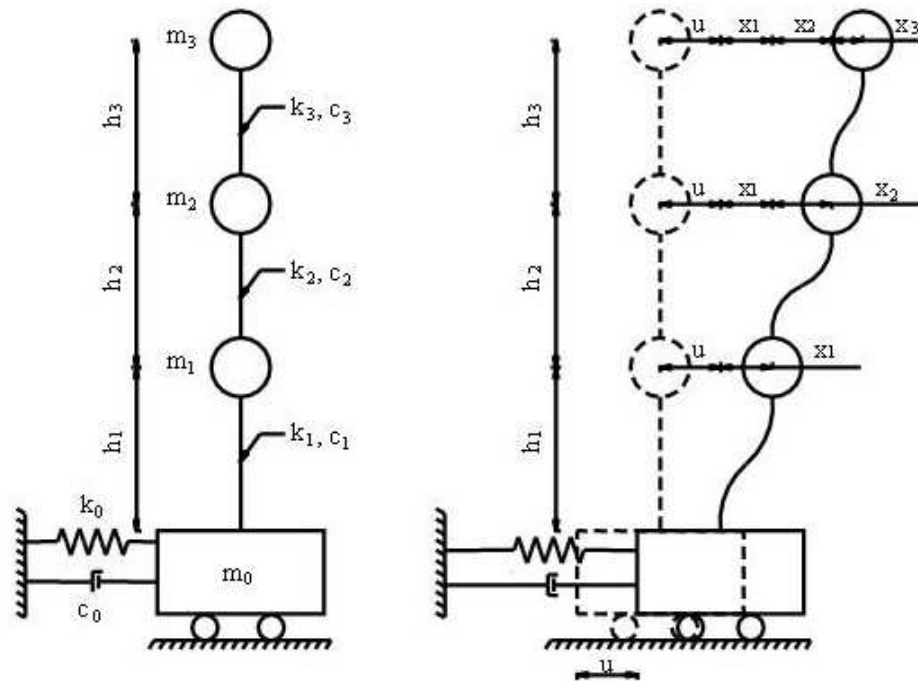


Figura 2.4: Modelo 4: Edificio de Cortante en Coordenadas No Generalizadas.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^3 m_i & 0 & 0 & 0 \\ m_1 & m_1 & 0 & 0 \\ m_2 & 0 & m_2 & 0 \\ m_3 & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} k_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\sum_{i=1}^3 m_i}{h_1} + \frac{\sum_{i=2}^3 m_i}{h_2} \right) & - \left(\frac{\sum_{i=2}^3 m_i}{h_2} \right) & 0 \\ 0 & - \left(\frac{\sum_{i=2}^3 m_i}{h_2} \right) & \left(\frac{\sum_{i=2}^3 m_i}{h_2} + \frac{m_3}{h_3} \right) & - \left(\frac{m_3}{h_3} \right) \\ 0 & 0 & - \left(\frac{m_3}{h_3} \right) & \left(\frac{m_3}{h_3} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ gx_1 \\ gx_2 \\ gx_3 \end{Bmatrix}. \quad (2.5)
\end{aligned}$$

2.6. Conclusiones

Se obtuvieron las ecuaciones que describen el comportamiento de cada uno de los modelos. En base a estas ecuaciones se realizaron simulaciones con el programa de cómputo Dymola^{MR} [47] con el fin de comparar sus comportamientos y establecer similitudes entre ellos. Un primer resultado de estas simulaciones fue que los modelos 1 y 2 pueden ser linealizados, bajo la consideración de deformaciones pequeñas, sin detrimento en los valores de desplazamientos, velocidades y aceleraciones calculados [39]. Por otro lado, un resultado de mayor importancia fue el hecho de que, con valores adecuados para las rigideces de los resortes helicoidales, el modelo 2 es equivalente a los modelos 3 y 4, lo cual tiende un primer vínculo entre los modelos para robots y los modelos para estructuras civiles [39]. Este resultado permitió pensar en la posibilidad de utilizar técnicas de identificación de fallas, ya desarrolladas para robots, en estructuras civiles.

Capítulo 3

Obtención de Parámetros Modales

3.1. Introducción

Antes de continuar con la obtención de la realización de los sistemas que se estudian es necesario hacer una precisión en cuanto al dominio en el tiempo en el que se trabaja. Si bien es cierto que los sistemas dinámicos que obedecen a la segunda ley de Newton, y que se representan mediante ecuaciones diferenciales, nos llevan a una representación en tiempo continuo; la realidad es que la mayoría de las observaciones del comportamiento de los sistemas, tales como las aceleraciones, velocidades o desplazamientos, se miden a intervalos discretos de tiempo, por lo que los datos utilizados para realizar la identificación deben ser empleados en algoritmos discretos y no en continuos. Los algoritmos de identificación descritos en los capítulos subsiguientes son precisamente algoritmos discretos, por lo que las matrices obtenidas mediante su ejecución son discretas. Siguiendo adelante es evidente que cualquier parámetro modal obtenido a partir de dichas matrices tiene significado matemático en el plano complejo \mathbb{C} , sin embargo, este significado matemático no tiene ningún equivalente desde el punto de vista físico, al menos en el sentido de lo que se maneja comúnmente en la dinámica estructural. Por lo anterior, es necesario transformar las matrices estimadas para el sistema en tiempo discreto, en matrices del mismo sistema, pero en tiempo continuo. Para ello es posible utilizar algoritmos ya implementados en funciones de programas como Matlab^{MR}, que permiten ir de una representación en tiempo discreto a otra en tiempo continuo, siempre que se conozca el intervalo de muestreo al que se registraron las mediciones.

Tomando en cuenta lo anterior, el siguiente paso consiste en obtener, a partir de las matrices estimadas con los algoritmos en el espacio de estados, un conjunto de matrices constantes A , B , C y D en tiempo continuo, que puedan ser utilizadas para obtener los parámetros modales del sistema.

3.2. Planteamiento Teórico

En la literatura [4], [16], [19], [20] y [21] se encuentra que a partir de los valores propios de la matriz A , es posible obtener el amortiguamiento y las frecuencias naturales amortiguadas del sistema. Sin embargo, este resultado no es siempre evidente a primera vista, por lo que a continuación se muestra la justificación para ello.

Partamos del hecho de que el comportamiento dinámico de una estructura civil, como el de cualquier otro sistema mecánico, puede ser descrito por las ecuaciones (3.1) y (3.2).

$$[M] \{\ddot{x}\} + [\Xi] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = [B_0] \{u\}, \quad (3.1)$$

$$\{y\} = [C_{0x}] \{x\} + [C_{0v}] \{\dot{x}\}. \quad (3.2)$$

En donde $[M]$ es la matriz de masa del sistema con dimensión $n \times n$, $[\Xi]$ es la matriz de amortiguamiento con dimensión $n \times n$, $[K]$ es la matriz de rigidez con dimensión $n \times n$, $[B_0]$ es la matriz de s entradas, $[C_{0x}]$ es la matriz de r salidas de desplazamientos, $[C_{0v}]$ es la matriz de r salidas de velocidades; $\{\ddot{x}\}$, $\{\dot{x}\}$ y $\{x\}$ son los vectores de aceleración, velocidad y desplazamiento con dimensiones $n \times 1$, mientras que $\{u\}$ y $\{y\}$ son los vectores de s entradas y r salidas respectivamente, y n es el número de grados de libertad del sistema. La matriz de masa es positiva definida, y las matrices de amortiguamiento y rigidez son positivas semidefinidas. En adelante se obviarán la mayor parte de los paréntesis cuadrados y de las llaves para facilidad de notación, entendiéndose de antemano que las variables escritas con letra mayúscula son matrices, en tanto que las escritas con letra minúscula son vectores; por otro lado, los escalares se indicarán en cada caso particular para evitar confusión.

Se define un vector de estado w :

$$w = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix},$$

en el cual la primera componente es el desplazamiento del sistema, y la segunda componente es la velocidad del sistema. En este caso, después de manipular adecuadamente las dos últimas ecuaciones se llega a la siguiente representación en el espacio de estados (ecuaciones (3.3) y (3.4)) en donde la dimensión del modelo es de dos veces el número de grados de libertad del sistema.

□

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}\Xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_0 \end{bmatrix} u, \quad (3.3)$$

$$y = [C_{0x} \ C_{0v}] \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}, \quad (3.4)$$

en donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}\Xi \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}B_0 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

$$C = [C_{0x} \ C_{0v}], \quad (3.7)$$

definen la tripleta del sistema en el espacio de estados.

Si como parte de las salidas es posible medir la aceleración, entonces se genera adicionalmente una matriz D que representa el término directo en la salida del sistema.

Ahora bien, es posible obtener una representación modal en el espacio de estados a partir de la representación anterior. Dicha representación modal tiene una tripleta A_m , B_m y C_m caracterizada por una matriz diagonal bloque A_m , y las correspondientes matrices de entrada y salida (ecuación (3.8)).

$$A_m = \text{diag}(A_{mi}), \quad B_m = \begin{bmatrix} B_{m1} \\ B_{m2} \\ \vdots \\ B_{mn} \end{bmatrix}, \quad C_m = [C_{m1} \ C_{m2} \ \cdots \ C_{mn}], \quad (3.8)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$, siendo n el número de modos, y en donde A_{mi} , B_{mi} y C_{mi} son bloques de 2×2 , $2 \times s$ y $r \times 2$ respectivamente.

Los bloques A_{mi} pueden presentarse de cuatro formas diferentes. Sin embargo, para poder llegar a cada una de ellas es necesario retomar el concepto de *modo* en un edificio.

Partimos de un problema común de valores propios como el definido por la ecuación (3.9).

$$\mathcal{A}\phi = \lambda\phi, \quad (3.9)$$

donde ϕ , que es un vector distinto de cero, es un vector propio de \mathcal{A} si para cierto escalar λ se cumple con la ecuación (3.9). El escalar λ , que puede ser cero, es un valor propio de \mathcal{A} asociado con el vector propio ϕ .

Partiendo de la ecuación anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\phi = \lambda\phi &\Rightarrow \mathcal{A}\phi = \lambda I\phi \\ &\Rightarrow \mathcal{A}\phi - \lambda I\phi = 0 \\ &\Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda I)\phi = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

De la ecuación (3.10) ϕ es un vector propio de \mathcal{A} si y sólo si es una solución no trivial del sistema homogéneo $(\mathcal{A} - \lambda I)\phi = 0$. En este caso, ϕ es un vector distinto de cero que pertenece al *espacio nulo* de $\mathcal{A} - \lambda I$. El sistema tendrá una solución no trivial si y sólo si el determinante de la matriz polinomial $\lambda I - \mathcal{A}$ es igual a cero. Así, λ es un valor propio de \mathcal{A} si y sólo si $\det(\mathcal{A} - \lambda I) = 0$, donde $\det(\bullet)$ denota el determinante de la matriz argumento.

Si se considera únicamente la parte homogénea de la ecuación (3.1) sin tomar en cuenta el amortiguamiento, se llega a la ecuación (3.11):

$$M\ddot{x} + Kx = 0. \quad (3.11)$$

Ahora bien, si se acepta que la estructura vibrará de acuerdo con un patrón de movimiento armónico, para el que $\ddot{x} = -\omega^2 x$ siendo ω la frecuencia natural de vibración, la ecuación (3.11) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} -\omega^2 Mx + Kx &= 0, \\ (K - \omega^2 M)x &= 0, \\ (M^{-1}K - \omega^2 M^{-1}M)x &= 0, \\ (M^{-1}K - \omega^2 I)x &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

De las ecuaciones (3.10) y (3.12) es evidente que las frecuencias naturales de la estructura no son otra cosa más que la raíz cuadrada de los valores propios de la matriz $[M^{-1}K]$, y que cada uno de ellos estará asociado a un vector propio, o *forma modal*, $x = \phi$ tal que se cumpla con la ecuación de referencia.

□

El resultado anterior es de suma importancia en tanto que se puede demostrar [9] que las formas modales correspondientes a diferentes frecuencias naturales satisfacen las siguientes condiciones de ortogonalidad (ecuación (3.13)) para cuando $\omega_n \neq \omega_r$:

$$\phi_n^T K \phi_r = 0, \quad \phi_n^T M \phi_r = 0. \quad (3.13)$$

La ortogonalidad de las formas modales implica que las siguientes matrices cuadradas son diagonales (ecuación (3.14)):

$$M_m \equiv \Phi^T M \Phi, \quad \Xi_m \equiv \Phi^T \Xi \Phi, \quad K_m \equiv \Phi^T K \Phi, \quad (3.14)$$

es decir, que son matrices que definen una serie de sistemas desacoplados entre sí, en un nuevo sistema de coordenadas generalizadas conocidas como *coordenadas modales*, donde $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_n]$ es la matriz compuesta por las formas modales.

Para aprovechar este nuevo sistema de coordenadas generalizadas q , donde $x = \Phi q$, las ecuaciones (3.1) y (3.2) se pueden reescribir como se muestra en las ecuaciones (3.15) y (3.16).

$$M\Phi\ddot{q} + \Xi\Phi\dot{q} + K\Phi q = B_0 u, \quad (3.15)$$

$$y = C_{0x}\Phi q + C_{0v}\Phi\dot{q}. \quad (3.16)$$

Premultiplicando ambas ecuaciones por Φ^T se obtiene:

$$\begin{aligned} \Phi^T M \Phi \ddot{q} + \Phi^T \Xi \Phi \dot{q} + \Phi^T K \Phi q &= \Phi^T B_0 u, \\ M_m \ddot{q} + \Xi_m \dot{q} + K_m q &= B_{0m} u, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \Phi^T y &= \Phi^T C_{0x} \Phi q + \Phi^T C_{0v} \Phi \dot{q}, \\ y_m &= C_{0xm} q + C_{0vm} \dot{q}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde:

$$\begin{aligned} B_{0m} &= \Phi^T B_0, \\ y_m &= \Phi^T y, \\ C_{0xm} &= \Phi^T C_{0x} \Phi, \\ C_{0vm} &= \Phi^T C_{0v} \Phi. \end{aligned}$$

Con base en el nuevo sistema de coordenadas, la ecuaciones (3.3) y (3.4) se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_m^{-1}K_m & -M_m^{-1}\Xi_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ M_m^{-1}B_{0m} \end{bmatrix} u, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$y_m = [C_{0xm} \quad C_{0vm}] \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix}, \quad (3.20)$$

en donde se redefinen:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_m^{-1}K_m & -M_m^{-1}\Xi_m \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M_m^{-1}B_{0m} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

$$C = [C_{0xm} \quad C_{0vm}]. \quad (3.23)$$

Si bien es cierto que las ecuaciones (3.19) y (3.20) fueron obtenidas utilizando los desplazamientos modales q , no son todavía la representación en el espacio de estados modal que se está buscando. Sin embargo, estas ecuaciones servirán como base para llegar a la tripleta A_m , B_m y C_m antes mencionada.

De la teoría de la dinámica estructural [9] se sabe que:

$$\Omega^2 = M_m^{-1}K_m, \quad (3.24)$$

$$\Xi_m = 2M_m Z \Omega, \quad (3.25)$$

donde:

$$\Omega \equiv \text{diag}(\omega_i),$$

$$Z \equiv \text{diag}(\xi_i),$$

recordando que las ω_i son las frecuencias naturales de la estructura y los ξ_i son los factores de amortiguamiento para cada frecuencia ω_i de la estructura.

□

Sustituyendo las ecuaciones (3.24) y (3.25) en la ecuación (3.21) se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega^2 & -2Z\Omega \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Ahora se requieren obtener los valores y vectores propios del sistema en el espacio de estados (ecuaciones (3.19) y (3.20)), para lo cual basta con sustituir la ecuación (3.26) en la ecuación (3.10) y resolver para λ , es decir:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} - \lambda I) \phi &= 0, \\ \left(\begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega^2 & -2Z\Omega \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right) \phi &= 0, \\ \begin{bmatrix} -\lambda & I \\ -\Omega^2 & -2Z\Omega - \lambda \end{bmatrix} \phi &= 0, \\ \det \begin{bmatrix} -\lambda & I \\ -\Omega^2 & -2Z\Omega - \lambda \end{bmatrix} &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

De la ecuación (3.27) se obtendrán dos λ 's por cada frecuencia natural de la estructura. Para ello conviene aprovechar el hecho de que, al ser las matrices Ω y Z diagonales, es posible resolver la ecuación anterior para λ considerando cada frecuencia natural de la estructura por separado (ecuación (3.28)).

$$\det [A_{mi} - \lambda_i I] = 0, \quad (3.28)$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda_i & I \\ -\omega_i^2 & -2\xi_i\omega_i - \lambda_i \end{bmatrix} = 0,$$

$$\lambda_i^2 + 2\xi_i\omega_i\lambda_i + \omega_i^2 = 0. \quad (3.29)$$

Resolviendo para λ_i :

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{-2\xi_i\omega_i \pm \sqrt{(2\xi_i\omega_i)^2 - 4\omega_i^2}}{2}, \\ \lambda_i &= \frac{-2\xi_i\omega_i \pm \sqrt{4\xi_i^2\omega_i^2 - 4\omega_i^2}}{2}, \\ \lambda_i &= \frac{-2\xi_i\omega_i \pm 2\omega_i\sqrt{\xi_i^2 - 1}}{2}, \\ \lambda_i &= -\xi_i\omega_i \pm \omega_i\sqrt{\xi_i^2 - 1}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

□

pero como para las estructuras civiles $\xi_i \ll 1$, la ecuación (3.30) se convierte en:

$$\lambda_i = -\xi_i \omega_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}, \quad (3.31)$$

donde $j = \sqrt{-1}$.

De esta forma, cada matriz diagonal bloque A_{mi} puede ser escrita como se muestra en la ecuación (3.32).

$$A_{mi} = \begin{bmatrix} -\xi_i \omega_i + j \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} & 0 \\ 0 & -\xi_i \omega_i - j \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

La ecuación (3.32) es una de las cuatro posibles formas en que se puede representar al bloque A_{mi} . En ella se puede observar que al obtener los valores propios del sistema en tiempo continuo, éstos serán pares de complejos conjugados, en los cuales de la parte real se obtiene fácilmente el amortiguamiento del sistema y de la parte imaginaria las frecuencias naturales amortiguadas.

Por otro lado, el vector de estado w_m de la representación modal consiste en n componentes independientes, w_{mi} , que representan un estado de cada modo:

$$w_m = \begin{Bmatrix} w_{m1} \\ w_{m2} \\ \vdots \\ w_{mn} \end{Bmatrix}.$$

Así pues, el i - ésimo modo tiene la representación en el espacio de estados (A_{mi}, B_{mi}, C_{mi}) , y se obtiene independientemente de las ecuaciones de estado:

$$\begin{cases} \dot{w}_{mi} = A_{mi} w_{mi} + B_{mi} u, \\ y_{mi} = C_{mi} w_{mi}, \end{cases} \quad (3.33)$$

tal que $y_m = \sum_{i=1}^n y_{mi}$. Todo esto queda justificado por la forma del bloque A_{mi} . El i - ésimo componente del estado w_{mi} tiene la siguiente forma:

$$w_{mi} = \begin{Bmatrix} q_{mi} - j \dot{q}_{m0i} \\ q_{mi} + j \dot{q}_{m0i} \end{Bmatrix}. \quad (3.34)$$

donde q_{mi} y \dot{q}_{mi} son el i - ésimo desplazamiento y velocidad modal respectivamente, y $q_{m0i} = \xi_i q_{mi} + \dot{q}_{mi} / \omega_i$.

En la práctica común de la Ingeniería Civil, y en específico de la Ingeniería Sísmica, es casi obligado el hecho de tener que estudiar los modelos estructurales en términos de coordenadas modales, ya que éstas permiten reducir considerablemente

□

el tamaño del problema. No obstante, la representación modal que se utiliza difiere de la que se muestra en las ecuaciones (3.32) a (3.34). Por otro lado, desde el punto de vista del Control Automático, la representación modal a la que se ha llegado, es bastante útil para conocer las características del sistema en estudio, cuando se le reconoce como un sistema lineal con coeficientes constantes. Una de las características más importantes, aunque no la única, es la de estabilidad, y antes de seguir adelante, nos detendremos alrededor de este término para tratar de seguir relacionando los términos y características del sistema que son significativos para cada disciplina.

En el ámbito de los sistemas dinámicos, la estabilidad se define con respecto a un punto de equilibrio dado. Se puede decir que un punto de equilibrio es estable si, cuando el vector de estado es movido ligeramente de dicho punto, aquel tiende a retornar a este, o al menos, no se mueve más lejos de él [29].

Como definición se establece que, un punto de equilibrio \bar{x} de un sistema lineal invariante en el tiempo como el descrito por las ecuaciones (3.3) ó (3.19) es *asintóticamente estable* si para cualquier condición inicial el vector de estado tiende a \bar{x} conforme el tiempo pasa. El punto será *inestable* si para alguna condición inicial el correspondiente vector de estado tiende hacia infinito.

Es importante observar que la estabilidad de (3.3) ó (3.19) está directamente relacionada con las correspondientes ecuaciones homogéneas. Considerando el caso en tiempo continuo, de un punto de equilibrio \bar{x} tendríamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + b \\ \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t) &= Ax(t) - A\bar{x}(t) + b - b,\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = A(x(t) - \bar{x}(t)).$$

Es claro que la condición para la que $x(t)$ tienda a $\bar{x}(t)$ es idéntica a aquella para la que $z(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ tiende a 0 en el sistema homogéneo mostrado en la ecuación (3.35).

$$\dot{z}(t) = Az(t). \tag{3.35}$$

Por lo tanto, en el caso de sistemas lineales como (3.3) ó (3.19), la estabilidad o inestabilidad asintótica no depende explícitamente del punto de equilibrio, sino que es determinado por las propiedades de la ecuación homogénea. Asimismo, como las soluciones de la ecuación homogénea dependen directamente de los valores propios

de la matriz A , entonces, estos valores propios definen el tipo de estabilidad que tiene el sistema. Para observar más claramente esto, supongamos que la matriz del sistema A es diagonalizable, luego entonces, el sistema se reduce a un conjunto de ecuaciones de primer orden, cada una de la forma:

$$\dot{z}_m(t) = \lambda z_m(t), \quad (3.36)$$

donde λ es un valor propio de A . Las soluciones para este sistema diagonal están dadas por:

$$z_m(t) = e^{\lambda t} z_m(0). \quad (3.37)$$

Cada uno de los valores λ puede ser escrito como la suma de una parte real y una parte imaginaria, es decir, $\lambda = \mu + j\eta$, donde $j = \sqrt{-1}$ y μ y η son números reales. De acuerdo con esto se tiene que,

$$e^{\lambda t} = e^{\mu t} e^{j\eta t}$$

y este valor tenderá exponencialmente a cero sí y sólo si $\mu < 0$. En otras palabras, la parte real de λ debe ser negativa. Por lo tanto, para la estabilidad asintótica es necesario y suficiente que la parte real de cada valor propio λ sea negativa. En otras palabras, cada valor λ debe localizarse en el semiplano izquierdo del plano complejo. Como es evidente, si al menos uno de los valores propios de A tiene una parte real positiva, el sistema será inestable.

Cuando aplicamos estos resultados a la ecuación (3.31), observamos que en los modelos que describen a las estructuras civiles, tanto la parte real como la imaginaria de los valores λ , dependen de las frecuencias naturales del sistema ω y del amortiguamiento ξ . No obstante lo anterior, dado que $\xi \ll 1$, es en la parte real en donde el amortiguamiento ejerce su papel importante, y como $\omega > 0$ y $\xi > 0$, entonces las estructuras civiles, desde la perspectiva de los sistemas lineales, son asintóticamente estables.

Nota 3.1 *Desde el punto de vista físico es muy esclarecedor el hecho de que, sea la parte real de los valores propios λ , en donde el amortiguamiento se hace efectivamente presente, la que haga que la respuesta del sistema tienda a cero después de aplicársele una pequeña perturbación.*

Retomando la ecuación (3.8) a partir de la (3.32) y definiendo a Ψ como la matriz formada por los vectores propios ψ_i asociados a cada valor propio λ_i de A , se observa que la matriz diagonal bloque A_m contiene la información de los factores de amortiguamiento modal y las frecuencias naturales amortiguadas; la

□

matriz $B_m = \Psi^{-1}B$ contiene a las amplitudes modales iniciales; y que la matriz $C_m = C\Psi$ contiene a las formas modales. De esta forma, como ya se había afirmado anteriormente, todos los parámetros modales del sistema quedan definidos por la tripleta A_m , B_m , y C_m .

Por otro lado, si bien es cierto que en la matriz C_m se encuentran contenidas las formas modales del sistema, éstas se encuentran asociadas al estado w_m definido por la ecuación (3.34), y en esta ecuación observamos que el estado está expresado como números complejos conjugados en donde en la parte real se encuentran los desplazamientos modales, mientras que en la parte imaginaria se encuentran relacionados los mismos desplazamientos modales con sus respectivas razones de cambio, o velocidades modales. Esta forma de expresar el estado tiene ventajas que por el momento no se consideran en el desarrollo del presente trabajo, por lo que es conveniente utilizar otra de las tres formas restantes que existen para representar al bloque A_{mi} con la finalidad de obtener una matriz C_m asociada a una representación del estado con un significado físico más claro.

Las otras tres formas de representar al bloque A_{mi} se muestran en las ecuaciones (3.38) a (3.40) [16].

$$A_{mi} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & -2\xi_i\omega_i \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

$$A_{mi} = \begin{bmatrix} -\xi_i\omega_i & \omega_i \\ -\omega_i & -\xi_i\omega_i \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

$$A_{mi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\xi_i\omega_i \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

De estas últimas es conveniente considerar la definida por la ecuación (3.40), ya que para este caso, el i –ésimo componente del estado w_{mi} tiene la forma:

$$w_{mi} = \begin{Bmatrix} q_{mi} \\ \dot{q}_{mi} \end{Bmatrix}. \quad (3.41)$$

Como se puede observar, con esta representación, las formas modales contenidas en la matriz C_m , asociada a la matriz A_m , formada a su vez por bloques A_{mi} , que quedan definidos por (3.40), tienen un significado físico directo en cuanto que son directamente identificables tanto las frecuencias del sistema como los amortiguamientos modales, ya que el estado queda en términos de números reales y no existe ningún tipo de combinación entre los desplazamientos modales y las velocidades modales.

Para obtener la nueva tripleta A_m , B_m y C_m , basta con realizar las operaciones indicadas por las ecuaciones (3.42) a (3.45).

$$\bar{w}_{mi} = \mathcal{T}w_{mi}, \quad (3.42)$$

$$\bar{A}_{mi} = \mathcal{T}A_{mi}\mathcal{T}^{-1}, \quad (3.43)$$

$$\bar{B}_{mi} = \mathcal{T}B_{mi}, \quad (3.44)$$

$$\bar{C}_{mi} = C_{mi}\mathcal{T}^{-1}, \quad (3.45)$$

donde:

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-\xi_i\omega_i + j\omega_i}{2} & \frac{-\xi_i\omega_i - j\omega_i}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

3.3. Conclusiones

Se han establecido las bases teóricas para que a partir de las matrices estimadas con los algoritmos en el espacio de estados, se obtenga un conjunto de matrices A , B , C y D en tiempo continuo, mediante las cuales puedan obtenerse los parámetros modales del sistema en estudio. Si bien en la literatura se puede encontrar cómo se ha utilizado este procedimiento por diversos investigadores, se ha incluido este desarrollo en el presente trabajo para que no sea una caja negra en el trabajo de investigación que se desarrolla.

Capítulo 4

Algoritmo de Identificación ERA-OKID

4.1. Introducción

En el presente capítulo se presenta el primer algoritmo en el espacio de estados utilizado en la investigación desarrollada. Este algoritmo ha sido ampliamente utilizado por diversos autores en diferentes disciplinas desde hace veinte años. Los resultados del trabajo del Prof. Juang se ven plasmados en este algoritmo [19] y [20], el cual, en contraste con los algoritmos de realización clásicos, los cuales utilizan a la matriz generalizada de Hankel, comienza formando una matriz de bloques de datos que se obtiene de eliminar algunos renglones y columnas de la matriz generalizada de Hankel, pero manteniendo intacto al primer bloque de la matriz. Además, el orden estándar de las entradas en la matriz generalizada de Hankel no necesita ser mantenido.

La matriz de bloques de datos permite incluir solamente señales registradas sanas sin ninguna pérdida de capacidad. Esto resulta de gran utilidad ya que algunos sensores pueden ser más ruidosos que otros, o bien, algunos sensores pueden presentar un mal funcionamiento durante la prueba. La principal ventaja de esta capacidad es el potencial de minimizar la distorsión de los parámetros utilizados causada por el ruido. Una selección razonada de los datos utilizados en el arreglo de la matriz de bloques puede servir para minimizar los requerimientos computacionales del método. Una explicación más detallada de los pasos de implementación del algoritmo se presenta en las secciones subsecuentes.

Por último, se presenta la evaluación del algoritmo en los tres sistemas en estudio, cuyos resultados dan parámetros de comparación respecto de los otros dos algoritmos utilizados.

4.2. Planteamiento Teórico

El algoritmo tiene la finalidad de computar una realización de estado del sistema (4.1) a partir de entradas $u(k)$ y salidas $y(k)$ conocidas.

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k) + Du(k), \end{cases} \quad (4.1)$$

donde $x(k)$, $u(k)$ y $y(k)$ son los vectores de estado ($n \times 1$), de control o entradas ($r \times 1$) y de salidas ($m \times 1$) respectivamente, y en donde n representa el número de estados; las matrices constantes (A, B, C, D), con dimensiones apropiadas, representan la operación interna del sistema y son usadas para determinar la respuesta del sistema ante cualquier entrada.

La implementación de este algoritmo requiere de dos pasos sucesivos. En el primero se utiliza el algoritmo de identificación de sistemas basado en un observador y el filtro de Kalman llamado *Observer/Kalman Filter System Identification* (OKID en sus siglas en inglés) para obtener a los parámetros de Markov. En el segundo paso, tomando como punto de partida los parámetros de Markov previamente obtenidos, se utiliza el algoritmo de realización del sistema propio llamado *Eigensystem Realization Algorithm* (ERA en sus siglas en inglés) para obtener un modelo del sistema en el espacio de estados (ver [19] y [20]).

Dado un grupo de datos experimentales de entradas y salidas, el primer paso del algoritmo consiste en la siguiente secuencia:

1. **Calcular los parámetros del observador de Markov.** Se debe escoger un valor para p que determine el número de parámetros del observador de Markov a ser identificados a partir del conjunto de datos de entradas ($u(k)$) y salidas ($y(k)$).

$$\begin{matrix} m \times l \\ \mathbf{y} \end{matrix} = \begin{matrix} \bar{\mathbf{Y}} \\ m \times [(r+m)p+r] \end{matrix} \begin{matrix} [(r+m)p+r] \times l \\ \mathbf{V} \end{matrix}. \quad (4.2)$$

Por lo general, se requiere que p sea lo suficiente mayor (al menos cuatro o cinco veces) al orden efectivo del sistema para una identificación adecuada de la ganancia del filtro de Kalman. Posteriormente se deben formar las dos matrices \mathbf{y} y \mathbf{V} como se muestra en la ecuación (4.3) para condiciones iniciales cero, o bien, las matrices $\bar{\mathbf{y}}$ y $\bar{\mathbf{V}}$, tal y como se muestra en la ecuación (4.4) para condiciones iniciales diferentes de cero ($\bar{\mathbf{Y}}$ es la matriz que se desea hallar).

□

$$\begin{aligned}
y &= [y(0) \ y(1) \ y(2) \ \cdots \ y(p) \ \cdots \ y(l-1)], \\
\bar{Y} &= [D \ C\bar{B} \ C\bar{A}\bar{B} \ \cdots \ C\bar{A}^{p-1}\bar{B}], \\
\mathbf{V} &= \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & u(2) & \cdots & u(p) & \cdots & u(l-1) \\ & v(0) & v(1) & \cdots & v(p-1) & \cdots & v(l-2) \\ & & v(0) & \cdots & v(p-2) & \cdots & v(l-3) \\ & & & \ddots & \vdots & \cdots & \cdots \\ & & & & v(0) & \cdots & v(l-p-1) \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= [y(p) \ y(p+1) \ \cdots \ y(l-1)], \\
\bar{Y} &= [D \ C\bar{B} \ C\bar{A}\bar{B} \ \cdots \ C\bar{A}^{p-1}\bar{B}], \\
\bar{\mathbf{V}} &= \begin{bmatrix} u(p) & u(p+1) & \cdots & u(l-1) \\ v(p-1) & v(p) & \cdots & v(l-2) \\ v(p-2) & v(p-1) & \cdots & v(l-3) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ v(0) & v(1) & \cdots & v(l-p-1) \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{4.4}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= A + GC, \\
\bar{B} &= [B + GD \ -G], \\
v(k) &= \begin{bmatrix} u(k) \\ y(k) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

y G es una matriz arbitraria de dimensiones $n \times m$ escogida de tal manera que \bar{A} sea estable tal y como se desea.

2. **Recuperar los parámetros de Markov del sistema y de la ganancia del observador.** A partir de la identificación de los parámetros del observador de Markov (esto es $[CA^{k-1}B \ CA^{k-1}G]$), utilice la ecuación (4.5) para determinar mediante ella a los parámetros combinados del sistema ($Y^{(1)}$) y de la ganancia del observador ($Y^{(2)}$). Para obtener un número de parámetros

□

de Markov mayor al número de parámetros del observador de Markov identificados, simplemente establezca a los parámetros del observador de Markov extras iguales a cero.

$$P_k = \begin{bmatrix} CA^{k-1}B & CA^{k-1}G \end{bmatrix},$$

$$P_k = \begin{bmatrix} \bar{Y}_k^{(1)} - \bar{Y}_k^{(2)}D & \bar{Y}_k^{(2)} \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{k-1} \bar{Y}_i^{(2)} \begin{bmatrix} Y_{k-i} & Y_{k-i}^0 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

para $k = 1, 2, \dots, l$.

3. **Obtenga un modelo del sistema en el espacio de estados, así como la ganancia del observador a partir de la secuencia recuperada de los parámetros de Markov del sistema y de la ganancia del observador.** Para ello utilice el algoritmo de realización del sistema propio ERA o el algoritmo de realización del sistema propio utilizando correlación de datos llamado *Eigensystem Realization Algorithm using Data Correlation* (ERA/DC en sus siglas en inglés).
4. **Encuentre la solución de los valores propios de la matriz de estado obtenida y transforme el modelo obtenido a coordenadas modales para la identificación paramétrica modal.** Los parámetros modales incluyen frecuencias, amortiguamientos, así como formas modales en la localización de los sensores.

A continuación, de acuerdo a lo que se indica en el paso 3 de la secuencia anterior, se implementa al algoritmo ERA (que constituye el segundo paso del algoritmo en curso), el cual se describe mediante la siguiente secuencia (ver [19] y [20]):

1. **Construya una matriz de bloques Hankel $H(0)$ mediante el arreglo de los parámetros de Markov (muestras de la respuesta a un pulso) ordenados en bloques con α, β, s_i ($i = 1, 2, \dots, \alpha$) y t_j ($j = 1, 2, \dots, \beta$) dadas.** Ver ecuación (4.6).

$$H(k-1) = [Y_{s_i+k+t_j}]; \quad Y_{s_i+k+t_j} = C_j A^{s_i+k-1+t_j} B_i, \quad (4.6)$$

donde $s_0 = t_0 = 0$, y s_i y t_j son enteros arbitrarios. Las matrices B_i y C_j^T son subarreglos de B y C , $[b_1, b_2, \dots, b_r]$ y $[c_1^T, c_2^T, \dots, c_m^T]^T$, respectivamente. En

estas matrices el vector columna b_i es el vector de influencia de la entrada de control i -ésima y el vector renglón c_j es el vector de influencia de la medición del sensor j -ésimo.

Esta ecuación tiene una forma matemática más compleja que la tradicional matriz Hankel $H(k-1)$, ecuación (4.7). Sin embargo, representa a la misma matriz $H(k-1)$ de la ecuación (4.7) después de haber sido eliminadas algunos renglones y columnas, pero manteniendo intacto el primer bloque, es decir Y_k .

$$H(k-1) = \begin{bmatrix} Y_k & Y_{k+1} & \cdots & Y_{k+\beta-1} \\ Y_{k+1} & Y_{k+2} & \cdots & Y_{k+\beta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_\alpha & Y_{1+\alpha} & \cdots & Y_{\alpha+\beta-1} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

La matriz de datos por bloques de la ecuación (4.10) permite incluir sólo mediciones confiables sin pérdida de precisión. Esto resulta útil ya que existen mediciones que pueden ser más ruidosas que otras o sensores que pueden estar fluctuando durante la prueba. La ventaja de esta capacidad es el potencial para minimizar la distorsión, de los parámetros identificados, causada por el ruido. Por otro lado, una selección juiciosa de los datos, así como un arreglo adecuado dentro de la matriz de bloques $H(k)$, puede ayudar a minimizar los requerimientos computacionales del método.

2. Descomponga a $H(0)$ utilizando la descomposición de valores singulares según la ecuación (4.8).

$$H(0) = R\Sigma S^T, \quad (4.8)$$

donde R y S son ortonormales y Σ es una matriz rectangular:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con $\Sigma_n = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n]$ y monotónicamente decreciente σ_i ; $(i = 1, 2, \dots, n)$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_i \geq \sigma_{i+1} \geq \dots \geq \sigma_n > 0.$$

3. **Determine el orden del sistema examinando los valores singulares de la matriz Hankel $H(0)$.**

Una vez hecho esto se puede establecer a R_n y S_n como las matrices formada por las primeras n columnas de R y S respectivamente. Por lo tanto, la matriz $H(0)$ y su pseudoinversa llegan a ser:

$$H(0) = R_n \Sigma_n S_n^T \quad \text{donde} \quad R_n^T R_n = I_n = S_n^T S_n$$

$$\text{y}$$

$$H^\dagger = S_n \Sigma_n^{-1} R_n^T.$$

4. **Construya una tripleta de orden mínimo $[\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}]$ utilizando una matriz de bloques Hankel trasladada $H(1)$, para $k = 2$, de acuerdo con la ecuación (4.9).**

$$\hat{A} = \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} R_n^T H(1) S_n \Sigma_n^{-\frac{1}{2}}, \quad \hat{B} = \Sigma_n^{\frac{1}{2}} S_n^T E_r, \quad \hat{C} = E_m^T R_n \Sigma_n^{\frac{1}{2}}, \quad (4.9)$$

donde si se define a O_i como una matriz nula de orden i , y siendo I_i una matriz identidad de orden i , entonces $E_m^T = [I_m \ O_m \ \cdots \ O_m]$, donde a su vez m es el número de salidas, y $E_r^T = [I_r \ O_r \ \cdots \ O_r]$, en donde r es el número de entradas. La ecuación (4.9) es la formulación básica del algoritmo y se obtiene después de considerar las siguientes igualdades:

$$H(k) = \mathcal{P}_\alpha A^k \mathcal{Q}_\beta,$$

donde:

$$\mathcal{P}_\alpha = \begin{bmatrix} C \\ C_1 A^{s_1} \\ \vdots \\ C_\alpha A^{s_\alpha} \end{bmatrix}$$

y:

$$\mathcal{Q}_\beta = [B \quad A^{t_1} B_1 \quad \cdots \quad A^{t_\beta} B_\beta].$$

Ahora bien, si se asume la existencia de una matriz H^\dagger se debe satisfacer la relación:

$$\mathcal{Q}_\beta H^\dagger \mathcal{P}_\alpha = I_n.$$

Una vez establecidas las igualdades anteriores, se procede como se muestra a continuación para obtener un modelo de orden mínimo:

$$\begin{aligned} Y_k &= E_m^T H(k-1) E_r, \\ Y_k &= E_m^T \mathcal{P}_\alpha A^{k-1} \mathcal{Q}_\beta E_r, \\ Y_k &= E_m^T \mathcal{P}_\alpha [\mathcal{Q}_\beta H^\dagger \mathcal{P}_\alpha] A^{k-1} [\mathcal{Q}_\beta H^\dagger \mathcal{P}_\alpha] \mathcal{Q}_\beta E_r, \\ Y_k &= E_m^T H(0) [S_n \Sigma_n^{-1} R_n^T] \mathcal{P}_\alpha A^{k-1} \mathcal{Q}_\beta [S_n \Sigma_n^{-1} R_n^T] H(0) E_r, \\ Y_k &= E_m^T H(0) S_n \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \left[\Sigma_n^{-\frac{1}{2}} R_n^T H(1) S_n \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \right]^{k-1} \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} R_n^T H(0) E_r, \\ Y_k &= E_m^T R_n \Sigma_n^{\frac{1}{2}} \left[\Sigma_n^{-\frac{1}{2}} R_n^T H(1) S_n \Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \right]^{k-1} \Sigma_n^{\frac{1}{2}} S_n^T E_r. \end{aligned}$$

Comparando este resultado con la ecuación (4.13) se obtiene la tripleta de orden mínimo, $[\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}]$, que define al sistema estimado.

5. Encuentre la solución de los valores propios de la matriz de estado obtenida y transforme el modelo obtenido a coordenadas modales, de acuerdo con la ecuación (4.10), para calcular el amortiguamiento del sistema y las frecuencias.

$$\begin{cases} x_m(k+1) = \hat{\Lambda} x_m(k) + \hat{B}_m u(k), \\ y(k) = \hat{C}_m x_m(k) + D u(k), \end{cases} \quad (4.10)$$

con r entradas y m salidas, donde $\hat{\Lambda}$ es una matriz diagonal que contiene a los valores propios identificados, $\hat{\lambda}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), del sistema, y \hat{B}_m y \hat{C}_m son las matrices de entrada y salida en coordenadas modales respectivamente que se calculan como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \hat{\Psi}\hat{\Lambda}\hat{\Psi}^{-1}, \\ \hat{B}_m &= \hat{\Psi}^{-1}\hat{B}, \\ \hat{C}_m &= \hat{C}\hat{\Psi}.\end{aligned}$$

6. Calcule la coherencia de la amplitud modal (MAC) de acuerdo con al ecuación (4.11) y el valor singular del modo (MSV), ecuación (4.12), para distinguir entre los modos del sistema y los modos del ruido generado durante la medición de las señales de entrada y salida.

$$MAC_i = \frac{|\bar{q}_i \hat{q}_i^*|}{(|\bar{q}_i \hat{q}_i^*| |\hat{q}_i \hat{q}_i^*|)^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.11)$$

donde $i = 1, \dots, n$ y “*” significa la transpuesta y compleja conjugada.

$$\begin{aligned}\hat{q}_i &= [\hat{b}_i \quad \hat{\lambda}_i \hat{b}_i \quad \hat{\lambda}_i^2 \hat{b}_i \quad \dots \quad \hat{\lambda}_i^{l-2} \hat{b}_i], \\ \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \vdots \\ \bar{q}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [b_1 \quad \lambda_1 b_1 \quad \dots \quad \lambda_1^{l-\alpha-1}] \\ [b_2 \quad \lambda_2 b_2 \quad \dots \quad \lambda_2^{l-\alpha-1}] \\ \vdots \\ [b_n \quad \lambda_n b_n \quad \dots \quad \lambda_n^{l-\alpha-1}] \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}MSV_i &= \sqrt{|\hat{c}_i| \left(1 + |\hat{\lambda}_i| + |\hat{\lambda}_i^2| + \dots + |\hat{\lambda}_i^{l-2}| \right) |\hat{b}_i|}, \\ MSV_i &\approx \sqrt{\frac{|\hat{c}_i| |\hat{b}_i|}{\left(1 - |\hat{\lambda}_i| \right)}},\end{aligned} \quad (4.12)$$

donde la señal de aproximación es válida sólo cuando $|\hat{\lambda}_i|$ es menor que 1 y el número de los parámetros de Markov l es suficientemente grande.

MAC y MSV constituyen indicadores de precisión. En efecto, la coherencia de amplitud modal (MAC) puede ser pensada como el producto punto entre, el vector compuesto de un número seleccionado de intervalos de tiempo de la respuesta a un impulso unitario asociada con un modo del modelo identificado,

y, el vector correspondiente obtenido de la respuesta a la señal utilizada en la identificación. Si los dos vectores coinciden, entonces el modelo reproduce los datos de la respuesta a la señal utilizada. De otra forma, el producto punto puede ser pensado como un coseno generalizado del ángulo entre los vectores de la respuesta medida y la respuesta del modelo identificado.

Por otro lado, el método del valor singular del modo (*MSV*) se emplea para caracterizar la contribución de cada modo identificado a la respuesta del modelo identificado. El algoritmo de identificación trata de identificar un modelo que se ajuste a la respuesta del sistema. Por lo que un modo que tiene una gran contribución a la respuesta del modelo identificado, también tiene una gran contribución a la respuesta medida del sistema y, en consecuencia, es identificado adecuadamente por el algoritmo.

7. **Determine el modelo del sistema reducido basado en los indicadores de precisión calculados en el paso 6, reconstruya los parámetros de Markov Y_k , ecuación (4.13), y compare con los parámetros de Markov medidos.**

$$Y_0 = D, \quad Y_1 = CB, \quad Y_2 = CAB, \quad \dots, \quad Y_k = CA^{k-1}B. \quad (4.13)$$

Una vez descrito el procedimiento que emplea el algoritmo para la identificación se presentan los ejemplos de aplicación.

4.3. Sistema Teórico de Un Grado de Libertad

El primer modelo común utilizado es el de un sistema masa - resorte - amortiguador de un grado de libertad excitado en su base. El objetivo del uso de este sistema simple es el de comenzar a utilizar las técnicas de identificación en una situación totalmente controlada en la que se conocen de antemano los resultados a los que se deberá llegar. Las propiedades de masa, amortiguamiento y rigidez se adecuaron dependiendo del tipo de excitación a la que se sometería el sistema. Se buscó tener un panorama general del comportamiento de los algoritmos utilizados, en función del tipo de excitación sísmica utilizada, motivo por el cual se decidió excitar al sistema con el registro del sismo de El Centro ocurrido en la región de Imperial Valley en California en el año de 1940 (El Centro); este sismo es característico de sismos registrados en terreno firme y cercanos al epicentro. Por el otro lado, si existe algún sismo representativo de características totalmente diferentes al anterior, ese es el registrado en la estación SCT dirección este-oeste en la Ciudad de México

durante el sismo del 19 de septiembre de 1985 (SCTEO), cuya señal fue registrada en un sitio de suelo muy blando y bastante alejado del epicentro. Con el uso de estas dos señales se considera que se puede generar una visión del comportamiento de los algoritmos de identificación tratados en este estudio. Cabe mencionar que los resultados presentados en esta sección fueron publicados en [17].

4.3.1. Simulación Utilizando el Sismo de El Centro

El sistema de un grado de libertad utilizado puede ser descrito por cualquiera de las ecuaciones (2.4) y (2.5), mismas que se repiten en las ecuaciones (4.14) y (4.15) por conveniencia, y en las que m_i denota la i -ésima masa, k_i , c_i y h_i denotan la rigidez, amortiguamiento y altura de la i -ésima columna respectivamente. Esto es posible siempre que se considere que se cuenta únicamente con una masa, un amortiguador y un resorte con las características mostradas en (4.16), para el caso en que la excitación en la base se da mediante el uso del registro del sismo de El Centro.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^3 m_i & (\sum_{i=1}^3 m_i) & (\sum_{i=2}^3 m_i) & m_3 \\ (\sum_{i=1}^3 m_i) & (\sum_{i=1}^3 m_i) & (\sum_{i=2}^3 m_i) & m_3 \\ (\sum_{i=2}^3 m_i) & (\sum_{i=2}^3 m_i) h_1 & (\sum_{i=2}^3 m_i) & m_3 \\ m_3 & m_3 & m_3 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} k_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \\
 & \begin{Bmatrix} 0 \\ \left(\frac{\sum_{i=1}^3 m_i}{h_1}\right) gx_1 \\ \left(\frac{\sum_{i=2}^3 m_i}{h_2}\right) gx_2 \\ \left(\frac{m_3}{h_3}\right) gx_3 \end{Bmatrix}. \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^3 m_i & 0 & 0 & 0 \\ m_1 & m_1 & 0 & 0 \\ m_2 & 0 & m_2 & 0 \\ m_3 & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} k_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\sum_{i=1}^3 m_i}{h_1} + \frac{\sum_{i=2}^3 m_i}{h_2} \right) & - \left(\frac{\sum_{i=2}^3 m_i}{h_2} \right) & 0 \\ 0 & - \left(\frac{\sum_{i=2}^3 m_i}{h_2} \right) & \left(\frac{\sum_{i=2}^3 m_i}{h_2} + \frac{m_3}{h_3} \right) & - \left(\frac{m_3}{h_3} \right) \\ 0 & 0 & - \left(\frac{m_3}{h_3} \right) & \left(\frac{m_3}{h_3} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ gx_1 \\ gx_2 \\ gx_3 \end{Bmatrix}. \quad (4.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m &= 0.01428 \frac{\text{kg seg}^2}{\text{cm}}, \\
c &= 0.033 \frac{\text{kg seg}}{\text{cm}}, \\
k &= 16.00 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}. \quad (4.16)
\end{aligned}$$

La razón de utilizar estos valores en las propiedades del sistema es la de tener un sistema con un período natural de vibración cercano al período de la excitación. En este caso particular, el período natural de vibración del sistema es igual a $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0.1877 \text{ seg}$ [7], [9], [37] y [46]. Por otro lado, el valor del amortiguamiento corresponde a un porcentaje de amortiguamiento crítico del 5 %.

Con el fin de observar el comportamiento del algoritmo de identificación, ante la presencia de ruido, se consideraron tres niveles diferentes de ruido blanco para el que se asume que tiene media cero y que no tiene correlación con las variables del proceso. Aquí se introduce artificialmente el ruido para probar la robustez de la estrategia de identificación. En el cuadro 4.1 se muestran los valores identificados

% Ruido	Período [seg]	ξ
0	0.1879	0.0501
2	0.1880	0.0501
5	0.1880	0.0498

Cuadro 4.1: Período y porcentaje de amortiguamiento crítico, de un sistema de un grado de libertad, identificados con el algoritmo ERA-OKID utilizando el sismo de El Centro.

del período de vibración del sistema, así como del porcentaje de amortiguamiento crítico.

Por tratarse de un sistema simple, es posible comparar la diferencia entre las historias de desplazamientos, velocidades y aceleraciones *reales*, con las que se obtienen a partir de la realización producto de la aplicación del algoritmo ERA-OKID. Esta comparación se hace midiendo el error mediante la ecuación (4.17).

$$e = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y - \hat{y})^2}}{n}. \quad (4.17)$$

Aquí e corresponde a la desviación promedio de las salidas estimadas con respecto a las medidas.

Con base en la ecuación anterior, se presentan en el cuadro 4.2 los valores del error calculados para las historias de aceleraciones, velocidades y desplazamientos cuando se utiliza el sismo de El Centro como excitación en la base.

4.3.2. Simulación Utilizando el Sismo de SCTEO

Por otro lado, el sistema de un grado de libertad utilizado en el caso en que la excitación en la base se da mediante el uso del registro del sismo de SCTEO, tiene las características mostradas en (4.18).

□

% Ruido	Aceleraciones [$\frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$]	Velocidades [$\frac{\text{cm}}{\text{seg}}$]	Desplazamientos [cm]
0	0.0037	0.0001	3.1934×10^{-6}
2	0.0523	0.0016	4.7814×10^{-5}
5	0.1170	0.0041	1.0740×10^{-4}

Cuadro 4.2: Valores del error estimado para aceleraciones, velocidades y desplazamientos, de un sistema de un grado de libertad, generados con el algoritmo ERA-OKID utilizando el sismo de El Centro.

$$\begin{aligned}
 m &= 0.01428 \frac{\text{kg seg}^2}{\text{cm}}, \\
 c &= 0.0045 \frac{\text{kg seg}}{\text{cm}}, \\
 k &= 0.14 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

También en este caso la razón de utilizar estos valores en las propiedades del sistema es la de tener un sistema con un período natural de vibración cercano al período de la excitación. En este caso particular, el período natural de vibración del sistema es igual a 2.0067 seg. Por otro lado, se mantiene el criterio de utilizar un valor del amortiguamiento correspondiente a un porcentaje de amortiguamiento crítico del 5 %.

En el cuadro 4.3 se muestran los valores identificados del período de vibración del sistema, así como del porcentaje de amortiguamiento crítico para los tres niveles de ruido blanco considerados.

Al igual que cuando se utiliza el sismo de El Centro como excitación, en este caso también se calcularon los valores del error mediante la ecuación (4.17) y se presentan en el cuadro 4.4.

4.4. Sistema Teórico de Tres Grados de Libertad

El siguiente modelo consistió en un sistema de tres grados de libertad masa - resorte - amortiguador en el que se conocían todas sus características físicas, es

% Ruido	Período [seg]	ξ
0	2.0115	0.0459
2	2.0319	0.0636
5	0.0416	0.0269

Cuadro 4.3: Período y porcentaje de amortiguamiento crítico, de un sistema de un grado de libertad, identificados con el algoritmo ERA-OKID utilizando el sismo de SCTEO.

% Ruido	Aceleraciones [$\frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$]	Velocidades [$\frac{\text{cm}}{\text{seg}}$]	Desplazamientos [cm]
0	0.1810	0.0568	1.8319×10^{-2}
2	0.4716	0.1692	4.5841×10^{-2}
5	2.0353	0.6745	2.0560×10^{-1}

Cuadro 4.4: Valores del error estimado para aceleraciones, velocidades y desplazamientos, de un sistema de un grado de libertad, generados con el algoritmo ERA-OKID utilizando el sismo de SCTEO.

decir, se sabía el valor de cada una de sus masas así como la rigidez de sus resortes, la matriz de amortiguamiento, en coordenadas físicas, se calculó suponiendo que el factor de amortiguamiento era igual a $\xi = 0.05$ y que la matriz de amortiguamiento modal era diagonal con cada una de sus entradas igual a $cm_i = 2\xi\omega_i m_{mod_i}$, donde ω_i y m_{mod_i} son la frecuencia circular y la masa modal, respectivamente, para el modo i [7], [9], [37] y [46]. Al igual que en el sistema de un grado de libertad, para excitar al sistema se supuso que actuaba una aceleración en su base obtenida del acelerograma de El Centro en un caso, y del acelerograma de SCTEO en otro; las cuales generan fuerzas en cada una de sus masas iguales al producto de la aceleración en la base \ddot{u} por la masa m_i del nivel en cuestión, ver ecuación (4.15). De esta forma, conociendo las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento, así como las fuerzas que actúan en cada una de las masas generadas por la aceleración en la base, fue posible simular las aceleraciones que se producen en cada masa para que fueran utilizadas en la implementación de los algoritmos para la identificación del sistema. En ambos casos se consideró un 5 % de ruido blanco. Lo aquí reportado se publicó en [30].

4.4.1. Simulación Utilizando el Sismo de El Centro

Conociendo a las matrices de masa (M) y rigidez (K), ecuación (4.19), es posible conocer previamente los períodos naturales de vibración del sistema y las formas modales que se enlistan en el cuadro 4.5.

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{bmatrix} 0.0143 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0143 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0143 \end{bmatrix} \frac{\text{kg seg}^2}{\text{cm}}, \\
 K &= \begin{bmatrix} 32.00 & -16.00 & 0.00 \\ -16.00 & 32.00 & -16.00 \\ 0.00 & -16.00 & 16.00 \end{bmatrix} \frac{\text{kg}}{\text{cm}}, \\
 \Xi &= \begin{bmatrix} 0.0647 & -0.0190 & -0.0041 \\ -0.0190 & 0.0606 & -0.0231 \\ -0.0041 & -0.0231 & 0.0416 \end{bmatrix} \frac{\text{kg seg}}{\text{cm}}.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

En el cuadro 4.6 se muestran los valores de los parámetros identificados.

Como se puede observar, tanto los períodos como las formas modales obtenidas coinciden bastante bien con las teóricas para el primer modo, sin embargo, para el segundo y tercer modos la coincidencia ya no es del todo buena.

Modo	Período [seg]	Forma Modal
1	0.422	$\{ 1.000 \ 1.802 \ 2.247 \}^T$
2	0.150	$\{ 1.000 \ 0.445 \ -0.802 \}^T$
3	0.104	$\{ 1.000 \ -1.247 \ 0.555 \}^T$

Cuadro 4.5: Períodos y formas modales del sistema de tres grados de libertad utilizado para las simulaciones con el sismo de El Centro.

Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	0.422	0.0509	$\{ 1.000 \ 1.793 \ 2.235 \}^T$
2	0.142	0.0555	$\{ 1.000 \ 0.442 \ -0.802 \}^T$
3	0.091	0.0696	$\{ 1.000 \ -1.252 \ 0.557 \}^T$

Cuadro 4.6: Períodos, porcentajes de amortiguamientos críticos modales y formas modales del sistema de tres grados de libertad, identificados con el algoritmo ERA-OKID utilizando el sismo de El Centro.

4.4.2. Simulación Utilizando el Sismo de SCTEO

Cuando la excitación en la base está dada por el sismo de SCTEO, las matrices M y K se definen de acuerdo con la ecuación (4.20); a partir de ellas se obtienen los períodos naturales de vibración y formas modales que se muestran en el cuadro 4.7.

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{bmatrix} 0.0143 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0143 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0143 \end{bmatrix} \frac{\text{kg seg}^2}{\text{cm}}, \\
 K &= \begin{bmatrix} 0.28 & -0.14 & 0.00 \\ -0.14 & 0.28 & -0.14 \\ 0.00 & -0.14 & 0.14 \end{bmatrix} \frac{\text{kg}}{\text{cm}}, \\
 \Xi &= \begin{bmatrix} 0.0060 & -0.0018 & -0.0004 \\ -0.0018 & 0.0057 & -0.0022 \\ -0.0004 & -0.0022 & 0.0039 \end{bmatrix} \frac{\text{kg seg}}{\text{cm}}.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Modo	Período [seg]	Forma Modal
1	4.509	$\{ 1.000 \ 1.802 \ 2.247 \}^T$
2	1.609	$\{ 1.000 \ 0.445 \ -0.802 \}^T$
3	1.114	$\{ 1.000 \ -1.247 \ 0.555 \}^T$

Cuadro 4.7: Períodos y formas modales del sistema de tres grados de libertad utilizado para las simulaciones con el sismo de SCTEO.

En el cuadro 4.8 se muestran los valores de los parámetros identificados.

En este caso, tanto los períodos como las formas modales ya no presentan muy buena coincidencia con los valores teóricos, aún para el primer modo; en tanto que para el tercer modo la coincidencia se puede considerar como mala, ya que el valor del período identificado resulta estar totalmente alejado del valor teórico conocido.

4.5. Edificio Instrumentado

Una vez que probado el algoritmo en dos sistemas sencillos y en los que se conocían todos los parámetros a identificar, se procede a utilizar la misma técnica

Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	4.379	0.0850	$\{ 1.000 \ 1.727 \ 2.150 \}^T$
2	1.615	0.1037	$\{ 1.000 \ 0.496 \ -0.863 \}^T$
3	0.008	0.0701	$\{ 1.000 \ -1.179 \ 0.482 \}^T$

Cuadro 4.8: Períodos, porcentajes de amortiguamientos críticos modales y formas modales del sistema de tres grados de libertad, identificados con el algoritmo ERA-OKID utilizando el sismo de SCTEO.

en una estructura real (ver [30]). En este caso se utilizó uno de los edificios instrumentados por la empresa CANDE Ingenieros S.A. de C.V. para obtener datos de entrada y salida que pudieran ser utilizados para la identificación. El inmueble en cuestión se trata de un edificio de 24 niveles divididos en 8 niveles de estacionamiento y 16 niveles para uso de oficinas, ubicado en la zona de transición de la Ciudad de México, en la esquina que forman las avenidas de Universidad y Río Churubusco. La instrumentación consta de 12 sensores acelerométricos ubicados en diferentes puntos del inmueble, sin embargo, en la identificación se utilizarán solamente 8 de ellos, ya que el resto se encuentran ubicados en los extremos de las plantas de los niveles instrumentados, para medir los desplazamientos de torsión en el inmueble, y en este caso sólo se identificaron los parámetros considerando desplazamientos en los planos de las direcciones principales del edificio. Se utilizaron los registros obtenidos durante el sismo del 21 de enero de 2003.

Los sensores utilizados se encuentran ubicados en los niveles 8, 15 y 24, por lo que no es posible considerar las aceleraciones en todos los niveles, sin embargo, dado que este fue un primer ejercicio en la identificación de un inmueble real, se parte de la suposición de que es posible reproducir el comportamiento básico del edificio con un sistema reducido de tres grados de libertad con masas y rigideces equivalentes. Las matrices de masa y rigidez equivalentes para cada dirección principal del inmueble se obtuvieron mediante el método de Rayleigh-Ritz [7] y [9], y se muestran en la ecuación (4.21).

□

$$\begin{aligned}
M_T &= \begin{bmatrix} 0.8651 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9825 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3454 \end{bmatrix}, \\
K_T &= \begin{bmatrix} 3.8497 & 0 & 0 \\ 0 & 9.2634 & 0 \\ 0 & 0 & 13.9790 \end{bmatrix}, \\
M_L &= \begin{bmatrix} 0.8713 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0683 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1418 \end{bmatrix}, \\
K_L &= \begin{bmatrix} 4.6116 & 0 & 0 \\ 0 & 12.5832 & 0 \\ 0 & 0 & 16.3812 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

El muestreo de las aceleraciones en el inmueble por medio de los sensores se hace con un intervalo de tiempo de 0.005 seg, lo cual provocó que el número de muestras fuera excesivo para ser manejado en el computador portátil utilizado para estos trabajos, por lo que fue necesario reducir el número de muestras a utilizar. En este caso se consideró la longitud total del registro pero considerando muestras con un intervalo de tiempo de 0.05 seg.

Por otro lado, en el cuadro 4.9 se muestran los valores de los períodos fundamentales del inmueble estimados mediante un programa de computadora de elemento finito (*FEM*) y mediante el procedimiento comúnmente utilizado en la práctica para estimar periodos mediante vibración ambiental (*FRFs*), el cual, en este caso, sólo permitió estimar adecuadamente a los períodos de vibración de los primeros modos en cada dirección.

En el cuadro 4.10 se muestran los valores de los parámetros identificados utilizando 48 parámetros de Markov.

Al observar los resultados obtenidos se aprecia que la concordancia entre los valores estimados y los teóricos se puede considerar como buena, con excepción del segundo modo en dirección longitudinal. Lo anterior a pesar de que seguramente existen niveles de ruido en la señal que no se están midiendo, y que al tratarse de un caso de instrumentación real, el procesamiento de la señal puede generar un detrimento en la precisión de los cálculos numéricos. Por otro lado, *el efecto que tienen los sismos sobre las características modales de los edificios representa todavía un campo abierto para la investigación.*

Modo	FEM [seg]	FRFs [seg]
1 (T)	2.98	2.88
1 (L)	2.72	2.72
2 (T)	1.09	–
2 (L))	1.11	–

Cuadro 4.9: Períodos fundamentales del inmueble parcialmente instrumentado.

Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1 (T)	3.006	0.0343	$\{ 1.000 \ 3.156 \ 5.510 \}^T$
2 (T)	1.064	0.0018	$\{ 1.000 \ 0.921 \ -0.709 \}^T$
1 (L)	2.631	0.0279	$\{ 1.000 \ 2.838 \ 4.672 \}^T$
2 (L)	0.885	0.0222	$\{ 1.000 \ 1.065 \ -0.861 \}^T$

Cuadro 4.10: Parámetros modales identificados, del inmueble parcialmente instrumentado, utilizando el algoritmo ERA-OKID.

4.6. Conclusiones

Los resultados obtenidos en el sistema de un grado de libertad son bastante buenos cuando la excitación se da mediante el registro del sismo de El Centro, ya que aún para altos niveles de ruido blanco los períodos y porcentajes de amortiguamiento crítico identificados son bastante cercanos a los reales, asimismo, los valores del error medido entre las historias de aceleraciones, velocidades y desplazamientos obtenidas con los parámetros identificados y las reales se mantienen en niveles muy bajos. Por otro lado, cuando la excitación se da mediante el registro del sismo de SCTEO, el algoritmo comienza a presentar problemas para niveles de ruido altos, tanto en los parámetros modales identificados como en los valores del error medido entre las diferentes historias de aceleración; *una posible explicación de lo anterior puede ser el contenido de frecuencias del registro utilizado, el cual es representativo de una señal armónica.*

Por lo que toca a los resultados obtenidos en el sistema teórico de tres grados de libertad se puede observar un comportamiento similar al anterior. Cuando la excitación se da utilizando el registro del sismo de El Centro, los parámetros modales identificados coinciden bastante bien con los valores teóricos para los primeros modos, alejándose un poco más para el tercer modo. Por otro lado, cuando la excitación se genera a partir del registro del sismo de SCTEO, los parámetros identificados se alejan de los teóricos aún desde los primeros modos, obteniéndose ya para el tercer modo resultados que pueden considerarse como malos. Nuevamente, el cambio en la señal de excitación muestra ser un punto de diferencia importante en los resultados obtenidos.

Por último, los parámetros modales identificados para el edificio parcialmente instrumentado resultan ser bastante cercanos a los teóricos en la dirección transversal del inmueble, ya que presentan una diferencia de menos del 5%, mientras que en la dirección longitudinal la diferencia llega hasta un 20%, *lo cual ya no puede considerarse como un buen resultado en la experiencia que se tiene en dinámica estructural.*

Capítulo 5

Algoritmo de Identificación Subespacial

5.1. Introducción

El segundo algoritmo en el espacio de estados utilizado en la investigación aquí reportada es el que se basa en métodos subespaciales. Los desarrollos logrados en este campo en los últimos años se deben a una mezcla de ideas, hechos y algoritmos de la teoría de sistemas, estadística, teoría de optimización y álgebra lineal. Todo ello tiene como resultado los así llamados métodos subespaciales, cuyo nombre refleja el hecho de que las descripciones en el espacio de estado de los sistemas lineales pueden ser obtenidas a partir de espacios renglón y columna de ciertas matrices, calculadas a partir de datos de entrada-salida. Comúnmente, el espacio columna de tales matrices de datos contiene la información del modelo, mientras que los espacios renglón permiten obtener secuencias de estado del filtro de Kalman, directamente a partir de datos de entradas y salidas, es decir, sin el conocimiento previo del modelo.

Algunas ventajas de los métodos subespaciales es que no existe la necesidad de una parametrización explícita del modelo, la cual, para sistemas lineales de múltiples salidas puede resultar complicado. La elegancia y eficiencia computacional de los algoritmos obtenidos es también una ventaja de los mismos, ya que las dimensiones y la representación numérica de los subespacios antes mencionados se calculan utilizando la descomposición de valores singulares y la factorización QR, para lo cual existen numerosos algoritmos robustos y eficientes.

La evaluación del algoritmo subespacial en los tres modelos de estudio se presenta en las secciones subsecuentes. Los resultados obtenidos de la identificación con este método servirán como comparación con los otros dos algoritmos utilizados.

5.2. Planteamiento Teórico

Al igual que para el algoritmo ERA-OKID, un primer paso consiste en la obtención de las matrices en el espacio de estados que describen el comportamiento del sistema (5.1), para posteriormente instrumentar el procedimiento de obtención de parámetros modales. En esta sección se resume el algoritmo puesto a punto en la función de Matlab^{MR} [55] llamada *subid.m*, de la referencia [50], que se utiliza para llevar a cabo la identificación subespacial.

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k), \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) + v(k), \end{cases} \quad (5.1)$$

En los párrafos siguientes se hará una breve descripción de procedimiento que se sigue para obtener la identificación [50].

1. **Se calculan las proyecciones oblicuas y ortogonales de acuerdo con la ecuación (5.2).**

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_i &= Y_f / U_f \mathbf{W}_p, \\ \mathcal{Z}_i &= Y_f / \begin{pmatrix} \mathbf{W}_p \\ \mathbf{U}_f \end{pmatrix}, \\ \mathcal{Z}_{i+1} &= Y_f^- / \begin{pmatrix} \mathbf{W}_p^+ \\ \mathbf{U}_f^- \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde:

\mathcal{O} Es la proyección oblicua del espacio renglón de $Y_{i|2i-1}$ a lo largo del espacio renglón de $U_{i|2i-1}$ sobre el espacio renglón de $W_{0|i-1}$.

Y_f Son las salidas futuras $Y_{i|2i-1}$.

Y_f^- Son las salidas futuras $Y_{i+1|2i-1}$.

U_f Son las entradas futuras $U_{i|2i-1}$.

U_f^- Son las entradas futuras $U_{i+1|2i-1}$.

W_p Son las entradas pasadas (U_p) y salidas pasadas (Y_f).

W_p^+ Son las entradas pasadas (U_p^+) y salidas pasadas (Y_f^+).

\mathcal{Z} Es la proyección ortogonal del espacio renglón de $Y_{i|2i-1}$ sobre la suma de los espacios renglón de $U_{0|2i-1}$ y $Y_{0|i-1}$.

2. Calcular la descomposición de valores singulares de la proyección oblicua pesada.

$$\mathcal{O}_i \prod_{U_f^\perp} = USV^T, \quad (5.3)$$

donde:

U, S, V Son las matrices de una descomposición de valores singulares.

3. Determinar el orden por inspección de los valores singulares en S y particionar la descomposición de valores singulares adecuadamente para obtener U_1 y S_1 .
4. Determinar Γ_i y Γ_{i-1} como se muestra en la ecuación (5.4).

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= U_1 S_1^{\frac{1}{2}}, \\ \Gamma_{i-1} &= \underline{\Gamma}_i, \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde:

Γ_i Es la matriz de observabilidad extendida.

$\underline{\Gamma}_i$ Es la matriz de observabilidad extendida Γ_i , sin las últimas l filas.

5. Resolver el sistema de ecuaciones lineales para A y C .

$$\left(\frac{\Gamma_{i-1}^\dagger \cdot \mathcal{Z}_{i+1}}{Y_{i|i}} \right) = \left(\frac{A}{C} \right) \cdot \Gamma_i^\dagger \cdot \mathcal{Z}_i + \mathcal{K} \cdot U_f + \left(\frac{\rho_w}{\rho_v} \right). \quad (5.5)$$

Recalcular Γ_i y Γ_{i-1} a partir de A y C .

6. Resolver para B y D .

$$B, D = \arg \min_{B, D} \left\| \left(\frac{\Gamma_{i-1}^\dagger \cdot \mathcal{Z}_{i+1}}{Y_{i|i}} \right) - \left(\frac{A}{C} \right) \cdot \Gamma_i^\dagger \cdot \mathcal{Z}_i - \mathcal{K}(B, D) \cdot U_f \right\|_F^2 \quad (5.6)$$

□

donde

$$\mathcal{K}(B, D) \equiv \begin{pmatrix} \left(B|\Gamma_{i-1}^\dagger \cdot H_{i-1}^d \right) - A \cdot \Gamma_i^\dagger \cdot H_i^d \\ (D|0) - C \cdot \Gamma_i^\dagger \cdot H_i^d \end{pmatrix},$$

$$H_i^d \equiv \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \cdots & D \end{pmatrix},$$

e i denota el número de líneas de bloques.

Nota 5.1 *Antes de seguir adelante es importante señalar el hecho de que, si bien el algoritmo descrito en los pasos anteriores, es el resultado obtenido en [50] para la identificación de sistemas combinados estocásticos-deterministas, los sistemas estudiados en este trabajo caen sólo dentro del caso determinista (esto es ρ_w y ρ_v son iguales a cero).*

5.3. Sistema Teórico de Un Grado de Libertad

Siguiendo el camino trazado para la aplicación de los algoritmos de identificación, en esta sección se presenta la identificación del sistema masa - resorte - amortiguador de un grado de libertad mediante el algoritmo subespacial. En los siguientes apartados se muestran los resultados obtenidos para las dos señales de excitación consideradas. Lo aquí reportado se publicó en [17].

5.3.1. Simulación Utilizando el Sismo de El Centro

Las características del sistema identificado se muestran en (4.16) y se repiten en (5.7) por conveniencia. Como punto de comparación es conveniente recordar que un sistema con estas características presentará un período natural de vibración igual a 0.1877 seg. Con el fin de mostrar la eficacia de esta metodología, se muestran en el cuadro 5.1 los valores del período de vibración del sistema y del porcentaje de amortiguamiento crítico identificados para los tres niveles de ruido blanco considerados, recordando que se ha definido al ruido blanco como aquel con media cero y sin correlación con las variables del sistema. Así como en el capítulo anterior, el ruido se incluye para determinar la robustez del procedimiento de identificación.

□

$$\begin{aligned}
 m &= 0.01428 \frac{\text{kg seg}^2}{\text{cm}}, \\
 c &= 0.033 \frac{\text{kg seg}}{\text{cm}}, \\
 k &= 16.00 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

% Ruido	Período [seg]	ξ
0	0.1879	0.0501
2	0.1880	0.0501
5	0.1880	0.0503

Cuadro 5.1: Período y porcentaje de amortiguamiento crítico, de un sistema de un grado de libertad, identificados con el algoritmo Subespacial utilizando el sismo de El Centro.

En el cuadro 5.2 se muestran los valores del error calculados para las historias de aceleración, velocidad y desplazamientos. Al igual que en el caso de aplicación del algoritmo ERA-OKID, el error se midió utilizando la ecuación (4.17), misma que se repite a continuación en la ecuación (5.8).

$$e = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y - \hat{y})^2}}{n}. \tag{5.8}$$

5.3.2. Simulación Utilizando el Sismo de SCTEO

También en este caso las características del sistema utilizado se definieron previamente en el capítulo anterior, y sus valores que se encuentran en (4.18), se vuelven a mostrar en (5.9). El período de vibración del sistema con las características ya indicadas es igual a 2.0067 seg, y la comparación de este valor con los valores identificados se muestra en el cuadro 5.3 para los tres niveles de ruido blanco considerados.

% Ruido	Aceleraciones [$\frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$]	Velocidades [$\frac{\text{cm}}{\text{seg}}$]	Desplazamientos [cm]
0	0.0037	0.0001	3.1934×10^{-6}
2	0.0514	0.0027	4.7781×10^{-5}
5	0.1130	0.0042	1.0633×10^{-4}

Cuadro 5.2: Valores del error estimado para aceleraciones, velocidades y desplazamientos, de un sistema de un grado de libertad, generados con el algoritmo Subespacial utilizando el sismo de El Centro.

$$\begin{aligned}
 m &= 0.01428 \frac{\text{kg seg}^2}{\text{cm}}, \\
 c &= 0.0045 \frac{\text{kg seg}}{\text{cm}}, \\
 k &= 0.14 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}.
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

% Ruido	Período [seg]	ξ
0	2.0092	0.0501
2	2.0094	0.0502
5	2.0095	0.0499

Cuadro 5.3: Período y porcentaje de amortiguamiento crítico, de un sistema de un grado de libertad, identificados con el algoritmo Subespacial utilizando el sismo de SCTEO.

Por último, en el cuadro 5.4 se muestran los valores del error calculados para las historias de las respuestas obtenidas a partir de la realización generada de la identificación; en todos los casos se muestran los valores para los tres niveles de ruido blanco considerados.

□

% Ruido	Aceleraciones [$\frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$]	Velocidades [$\frac{\text{cm}}{\text{seg}}$]	Desplazamientos [cm]
0	0.0001	0.0000	9.7652×10^{-6}
2	0.0304	0.0098	3.1782×10^{-3}
5	0.0726	0.0235	7.4523×10^{-3}

Cuadro 5.4: Valores del error estimado para aceleraciones, velocidades y desplazamientos, de un sistema de un grado de libertad, generados con el algoritmo Subespacial utilizando el sismo de SCTEO.

5.4. Sistema Teórico de Tres Grados de Libertad

Para poder establecer puntos de comparación entre los dos métodos utilizados en el espacio de estados, se presentan la identificación de los sistemas de tres grados de libertad, ya descritos en el capítulo anterior, pero en esta ocasión mediante el uso del algoritmo subespacial. Al igual que en la identificación mediante el algoritmo ERA-OKID, se considera un nivel de ruido blanco de 5% para los dos sistemas identificados (ver [30]).

5.4.1. Simulación Utilizando el Sismo de El Centro

Al igual que para el algoritmo ERA-OKID, también para este algoritmo se identificó al sistema de tres grados de libertad cuyas matrices de masa (M), rigidez (K) y amortiguamiento (Ξ) se definen por la ecuación (4.19) que se muestra nuevamente en (5.10). Los resultados obtenidos de esta identificación se muestran en el cuadro 5.5.

$$\begin{aligned}
M &= \begin{bmatrix} 0.0143 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0143 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0143 \end{bmatrix} \frac{\text{kg seg}^2}{\text{cm}}, \\
K &= \begin{bmatrix} 32.00 & -16.00 & 0.00 \\ -16.00 & 32.00 & -16.00 \\ 0.00 & -16.00 & 16.00 \end{bmatrix} \frac{\text{kg}}{\text{cm}}, \\
\Xi &= \begin{bmatrix} 0.0647 & -0.0190 & -0.0041 \\ -0.0190 & 0.0606 & -0.0231 \\ -0.0041 & -0.0231 & 0.0416 \end{bmatrix} \frac{\text{kg seg}}{\text{cm}}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	0.419	0.0510	$\{ 1.000 \ 1.803 \ 2.248 \}^T$
2	0.142	0.0565	$\{ 1.000 \ 0.445 \ -0.802 \}^T$
3	0.092	0.0646	$\{ 1.000 \ -1.247 \ 0.555 \}^T$

Cuadro 5.5: Períodos, porcentajes de amortiguamientos críticos modales y formas modales del sistema de tres grados de libertad, identificados con el algoritmo Subespacial utilizando el sismo de El Centro.

No hay que olvidar que los valores mostrados en el cuadro 5.5 deben de compararse con los plasmados en el cuadro 4.5, que se repite aquí por conveniencia en el cuadro 5.6.

Como se puede observar, los períodos se alejan un poco de los valores teóricos, mientras que las formas modales coinciden bastante bien con las teóricas.

5.4.2. Simulación Utilizando el Sismo de SCTEO

Cuando la excitación en la base está dada por el sismo de SCTEO, las matrices M , K y Ξ se definen de acuerdo con la ecuación (5.11), repetida de la ecuación (4.20); a partir de ellas se obtienen los períodos naturales de vibración y formas modales ya descritas en el cuadro 4.7, que también se repite aquí en el cuadro 5.7.

□

Modo	Período [seg]	Forma Modal
1	0.422	$\{ 1.000 \ 1.802 \ 2.247 \}^T$
2	0.150	$\{ 1.000 \ 0.445 \ -0.802 \}^T$
3	0.104	$\{ 1.000 \ -1.247 \ 0.555 \}^T$

Cuadro 5.6: Períodos y formas modales del sistema de tres grados de libertad utilizado para las simulaciones con el sismo de El Centro.

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{bmatrix} 0.0143 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0143 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0143 \end{bmatrix} \frac{\text{kg seg}^2}{\text{cm}}, \\
 K &= \begin{bmatrix} 0.28 & -0.14 & 0.00 \\ -0.14 & 0.28 & -0.14 \\ 0.00 & -0.14 & 0.14 \end{bmatrix} \frac{\text{kg}}{\text{cm}}, \\
 \Xi &= \begin{bmatrix} 0.0060 & -0.0018 & -0.0004 \\ -0.0018 & 0.0057 & -0.0022 \\ -0.0004 & -0.0022 & 0.0039 \end{bmatrix} \frac{\text{kg seg}}{\text{cm}}.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Modo	Período [seg]	Forma Modal
1	4.509	$\{ 1.000 \ 1.802 \ 2.247 \}^T$
2	1.609	$\{ 1.000 \ 0.445 \ -0.802 \}^T$
3	1.114	$\{ 1.000 \ -1.247 \ 0.555 \}^T$

Cuadro 5.7: Períodos y formas modales del sistema de tres grados de libertad utilizado para las simulaciones con el sismo de SCTEO.

Ahora bien, cuando se lleva cabo la identificación del sistema con el algoritmo subespacial, se obtienen los valores mostrados en el cuadro 5.8 (se muestran los valores de los parámetros identificados).

Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	4.518	0.0428	$\{ 1.000 \ 1.802 \ 2.247 \}^T$
2	1.610	0.0502	$\{ 1.000 \ 0.446 \ -0.802 \}^T$
3	1.114	0.0501	$\{ 1.000 \ -1.246 \ 0.555 \}^T$

Cuadro 5.8: Períodos, porcentajes de amortiguamientos críticos modales y formas modales del sistema de tres grados de libertad, identificados con el algoritmo Subespacial utilizando el sismo de SCTEO.

En este caso, a diferencia de lo obtenido con el algoritmo ERA-OKID, los períodos coinciden mejor con los valores teóricos, aunque se puede observar que la diferencia aún es notoria.

5.5. Edificio Instrumentado

En el cuadro 5.9 se muestran los resultados de la identificación al aplicarse al edificio instrumentado considerando al sismo del 21 de enero de 2003 (ver [30]).

Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1 (T)	3.033	0.0561	$\{ 1.000 \ 3.236 \ 5.960 \}^T$
2 (T)	1.095	0.0453	$\{ 1.000 \ 1.031 \ -0.727 \}^T$
1 (L)	2.657	0.0463	$\{ 1.000 \ 2.844 \ 5.139 \}^T$
2 (L)	0.848	0.0363	$\{ 1.000 \ 1.208 \ -0.864 \}^T$

Cuadro 5.9: Parámetros modales identificados, del inmueble parcialmente instrumentado, utilizando el algoritmo Subespacial.

También en este caso es notable la cercanía que se presenta entre los períodos y formas modales estimados con los obtenidos mediante el programa de elemento

finito y la vibración ambiental mostrados nuevamente en el cuadro 5.10. Al igual que con el uso del algoritmo de identificación ERA-OKID, la buena concordancia se logra a pesar de la segura presencia de ruido y de los problemas numéricos que se producen en todos los procedimientos que involucran algún tipo de procesamiento de señales.

Modo	FEM [seg]	FRFs [seg]
1 (T)	2.98	2.88
1 (L)	2.72	2.72
2 (T)	1.09	–
2 (L))	1.11	–

Cuadro 5.10: Períodos fundamentales del inmueble parcialmente instrumentado.

5.6. Conclusiones

Los resultados obtenidos de la identificación en el sistema de un grado de libertad son bastante buenos para las dos condiciones de excitación considerada, de hecho, tanto el período natural de vibración del sistema como el porcentaje de amortiguamiento crítico identificados presentan muy poca variación respecto de los teóricos cuando la excitación se da con el sismo de SCTEO, lo cual ya marca una diferencia respecto de los resultados obtenidos con el algoritmo de identificación ERA-OKID, ya que como se mencionó en su oportunidad, este algoritmo presenta problemas cuando se utiliza este sismo como excitación. Por otro lado, los valores del error calculado para las diferentes historias de la respuesta quedan por debajo de los obtenidos para el algoritmo ERA-OKID, aún para niveles de ruido del orden del 5 %.

Cuando se hace la identificación del sistema teórico de tres grados de libertad se obtienen resultados satisfactorios. En este caso la diferencia entre los parámetros modales identificados y los teóricos sigue siendo notoria aunque de menor magnitud que lo obtenido con el algoritmo ERA-OKID. Se observa que cuando se utiliza como excitación al registro del sismo de SCTEO también se presenta un alejamiento entre

los parámetros identificados y los teóricos, sin embargo, este alejamiento es menor que el observado con el algoritmo ERA-OKID.

La identificación del edificio instrumentado es ligeramente mejor que los obtenido con el algoritmo ERA-OKID. La diferencia entre los parámetros identificados y los teóricos se mantiene por debajo del 2% en la dirección transversal y del 17% en la dirección longitudinal, de hecho, la diferencia mayor se presenta en el período del segundo modo en dirección longitudinal, siendo la diferencia para el primer modo en esa dirección de menos del 4%. Los valores de los porcentajes de amortiguamiento críticos identificados están muy cercanos entre sí, *y es notable desde el punto de vista de la dinámica y análisis estructural, el corroborar que el edificio real presenta un porcentaje de amortiguamiento crítico prácticamente igual a 5%, tal y como se considera en los procesos de diseño de este tipo de edificios.*

Capítulo 6

Método de Mínimos Cuadrados para Identificación

6.1. Introducción

El ampliamente conocido método de mínimos cuadrados fue desarrollado por Gauss en 1795 [15]. Es la solución más ampliamente aplicada para problemas de optimización lineal. El objetivo es el de encontrar la salida del modelo \hat{y} que mejor se aproxime a la salida del proceso y con la suma mínima del error cuadrático del valor de la función de pérdida. Esto es equivalente a encontrar la mejor combinación lineal de los regresores por medio de la optimización de los parámetros $\theta_1, \dots, \theta_n$.

El método de mínimos cuadrados no es en sí mismo un algoritmo de identificación como lo son los algoritmos ERA-OKID y Subespacial, de hecho, tales algoritmos hacen uso de esta metodología en el proceso de solución del problema que plantean. No obstante lo anterior, no hay que perder de vista que los algoritmos desarrollados en los dos capítulos precedentes se plantean en el espacio de estados, mientras que el planteamiento de este capítulo se dará en el ámbito de la ecuación diferencial de segundo orden que describe el comportamiento de sistemas mecánicos como las estructuras civiles.

Por lo anterior, en este capítulo no se concibe al método de mínimos cuadrados como parte de un algoritmo de identificación en el que se busca una solución óptima a un sistema lineal dado, sino que por el contrario, se hace uso de su filosofía para plantear directamente la solución al problema de la identificación de los parámetros que definen a la ecuación diferencial antes mencionada. En la sección del planteamiento teórico se aclarará completamente la diferencia entre ambos planteamientos.

Una ventaja de la aplicación de metodologías de identificación partiendo de la

ecuación diferencial que describe al sistema es el hecho de que es posible encontrar los parámetros físicos del mismo, sin tener que recurrir a procedimientos auxiliares para llegar a ellos; *el costo que se tiene que pagar por esta ventaja es la necesidad de conocer de antemano la estructura del sistema a identificar.*

En las secciones subsiguientes se muestra la identificación en línea de los tres sistemas que se han venido presentando a lo largo de este trabajo.

6.2. Planteamiento Teórico

El uso del Método de Mínimos Cuadrados, tal como se muestra en este capítulo, permite la identificación paramétrica de valores físicos claramente relacionados con las estructuras, en este caso se trata de masas, rigideces y amortiguamientos.

Al igual que para los métodos anteriores, se lleva a cabo la identificación de los sistemas académicos de uno y tres grados de libertad, así como del edificio instrumentado, pero en esta ocasión mediante la utilización del Método de Mínimos Cuadrados aplicado sobre la ecuación diferencial de segundo orden que los define.

6.2.1. Método de Mínimos Cuadrados

La obtención del algoritmo recursivo de mínimos cuadrados parte de suponer un modelo en la forma general autoregresiva con entradas exógenas, comúnmente conocida como *autoregressive with exogenous input* (ARX por sus siglas en inglés) con n mediciones que se han acumulado previamente [54]. De esta forma se tiene el siguiente problema de mínimos cuadrados:

$$\{Y\}_n = [\mathbf{A}]_n \{\beta\} + \{\zeta\}_n, \quad (6.1)$$

donde $\{Y\}_n$ denota a la matriz de salidas del modelo; $[\mathbf{A}]_n$ denota a la matriz de regresores del modelo; $\{\beta\}$ denota al vector de parámetros del modelo y $\{\zeta\}_n$ denota al vector del error del modelo. La solución de este problema está dada por:

$$\{\hat{\beta}\}_n = \left([\mathbf{A}]_n^T [\mathbf{A}]_n\right)^{-1} [\mathbf{A}]_n^T \{Y\}_n. \quad (6.2)$$

Si a partir de esta solución se empiezan a generar nuevas mediciones para x y y , el problema se convierte en el siguiente:

$$\begin{pmatrix} \{Y\}_n \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{A}]_n \\ \{\phi\}_{n+1}^T \end{pmatrix} \{\beta\} + \begin{pmatrix} \{\zeta\}_n \\ \zeta_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

□

con:

$$\{\phi\}_{n+1}^T = (y_n, \dots, y_{n-n_y}, x_{n-1}, \dots, x_{n-n_x+1}) \quad (6.4)$$

y la siguiente solución actualizada:

$$\{\hat{\beta}\}_{n+1} = \left[\begin{pmatrix} [\mathbf{A}]_n & \{\phi\}_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\mathbf{A}]_n \\ \{\phi\}_{n+1}^T \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} [\mathbf{A}]_n & \{\phi\}_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{Y\}_n \\ y_{n+1} \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Si ahora se define a $[P]_n$ de acuerdo con la ecuación (6.6):

$$[P]_n = \left([\mathbf{A}]_n^T [\mathbf{A}]_n \right)^{-1}, \quad (6.6)$$

la ecuación (6.5) se transforma en la ecuación (6.7):

$$\{\hat{\beta}\}_{n+1} = \left([P]_n + \{\phi\}_{n+1} \{\phi\}_{n+1}^T \right)^{-1} \left([\mathbf{A}]_n \{Y\}_n + \{\phi\}_{n+1} y_{n+1} \right). \quad (6.7)$$

Aquí es importante notar que el primer paréntesis representa a $[P]_{n+1}$ la cual puede ser expandida con el teorema del binomio (ecuación (6.8)) y sustituirse nuevamente en la ecuación (6.7). Si se procede de la forma descrita, se obtiene una nueva ecuación para $\{\hat{\beta}\}_{n+1}$ (ecuación (6.9)).

$$[P]_{n+1} = [P]_n \left(I - \frac{\{\phi\}_{n+1} \{\phi\}_{n+1}^T [P]_n}{1 + \{\phi\}_{n+1}^T [P]_n \{\phi\}_{n+1}} \right), \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \{\hat{\beta}\}_{n+1} &= [P]_n [\mathbf{A}]_n^T \{Y\}_n - \frac{[P]_n \{\phi\}_{n+1} \{\phi\}_{n+1}^T [P]_n [\mathbf{A}]_n^T \{Y\}_n}{1 + \{\phi\}_{n+1}^T [P]_n \{\phi\}_{n+1}} + \\ &+ [P]_n \{\phi\}_{n+1}^T y_{n+1} - \frac{[P]_n \{\phi\}_{n+1} \{\phi\}_{n+1}^T [P]_n \{\phi\}_{n+1} y_{n+1}}{1 + \{\phi\}_{n+1}^T [P]_n \{\phi\}_{n+1}}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Ahora bien, con la definición de $[P]_n$ la ecuación (6.2) puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$\{\hat{\beta}\}_n = [P]_n [\mathbf{A}]_n^T \{Y\}_n. \quad (6.10)$$

Por lo tanto, la ecuación (6.9) puede ser llevada a la forma de la ecuación (6.11):

□

$$\left\{\hat{\beta}\right\}_{n+1} = \left\{\hat{\beta}\right\}_n + \{\mathbf{K}\}_{n+1} \left(y_{n+1} - \{\phi\}_{n+1}^T \left\{\hat{\beta}\right\} \right), \quad (6.11)$$

donde la *ganancia de Kalman* $\{\mathbf{K}\}$ se define por:

$$\{\mathbf{K}\}_{n+1} = \frac{[P]_n \{\phi\}_{n+1}}{1 + \{\phi\}_{n+1}^T [P]_n \{\phi\}_{n+1}}. \quad (6.12)$$

De esta manera, las ecuaciones (6.11) y (6.12) en conjunto con la ecuación (6.8), constituyen las ecuaciones del algoritmo recursivo de mínimos cuadrados.

Si bien las ecuaciones antes mencionadas son útiles para la puesta a punto del algoritmo recursivo, no son útiles si durante el proceso se busca seguir la variación de los parámetros. Lo anterior es debido a que después de N iteraciones los parámetros resultantes son idénticos a los que se obtendrían de la estimación fuera de línea utilizando el grupo de N mediciones, ya que el procedimiento recursivo recuerda todas las mediciones pasadas y les da el mismo peso. Para solucionar este inconveniente basta con introducir una constante que representa un factor de olvido $\lambda < 1$ que decae exponencialmente con el tiempo y que permite que a las mediciones pasadas se les asigne una ponderación afectada por él. De esta forma, las modificaciones al algoritmo son las siguientes:

$$\{\mathbf{K}\}_{n+1} = \frac{[P]_i \{\phi\}_{i+1}}{\lambda + \{\phi\}_{i+1}^T [P]_i \{\phi\}_{i+1}}, \quad (6.13)$$

$$[P]_{i+1} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \{\mathbf{K}\}_{i+1} \{\phi\}_{i+1}^T \right) [P]_i, \quad (6.14)$$

junto con la ecuación (6.11).

6.2.2. Planteamiento de los Sistemas de Segundo Orden para la Aplicación del Método de Mínimos Cuadrados

Lo que a continuación se presenta se basa en lo publicado en [54]. Como punto de partida se asume que, en un sistema de varios grados de libertad, las masas se concentran en N puntos de medición, con una masa m_i correspondiente al punto i . Por otro lado, se asume que cada punto i se puede conectar a otro punto j mediante una liga denominada l_{ij} , o bien, se puede conectar al terreno mediante una liga l_{ii} .

Si se les impone un movimiento a las masas y después se les deja libres, entonces éstas regresarán a la posición de equilibrio por la acción de las fuerzas internas que se

□

generan en cada una de las ligas. Se asume que estas fuerzas dependen únicamente de los desplazamientos y velocidades relativos que se dan entre cada una de las masas en los extremos de las ligas. Si $\delta_{ij} = y_i - y_j$ es el desplazamiento relativo entre la masa i y la masa j , y $\dot{\delta}_{ij} = \dot{y}_i - \dot{y}_j$ es la correspondiente velocidad relativa, entonces la fuerza en la liga l_{ij} se define como (6.15).

$$\text{Fuerza en la liga } l_{ij} := f_{ij} \left(\delta_{ij}, \dot{\delta}_{ij} \right), \quad (6.15)$$

donde $\delta_{ii} = y_i$ y $\dot{\delta}_{ii} = \dot{y}_i$ para la liga que une a la masa al terreno. A partir del hecho de que las ligas l_{ij} y l_{ji} son las mismas, se puede observar a (6.16).

$$f_{ij} \left(\delta_{ij}, \dot{\delta}_{ij} \right) = -f_{ji} \left(\delta_{ji}, \dot{\delta}_{ji} \right) = -f_{ij} \left(-\delta_{ij}, -\dot{\delta}_{ij} \right). \quad (6.16)$$

Si ahora se aplica una fuerza externa $u_i(t)$ a cada masa, las ecuaciones de movimiento son:

$$m_i \ddot{y}_i + \sum_{j=1}^N f_{ij} \left(\delta_{ij}, \dot{\delta}_{ij} \right) = u_i(t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (6.17)$$

Se asume que este tipo de modelos puede ser útil para representar a un sistema con un número finito de modos excitados. En la práctica, sólo las N aceleraciones y fuerzas de entrada en cada punto son medidas. Por otro lado, se puede adoptar una representación polinomial para f_{ij} , obteniéndose el modelo descrito por la ecuación (6.18).

$$m_i \ddot{y}_i + \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q a_{(ij)kl} (\delta_{ij})^k (\dot{\delta}_{ij})^l = u_i. \quad (6.18)$$

Una vez establecido un modelo, como el de la ecuación (6.18), es posible utilizar una estimación de parámetros con el método de mínimos cuadrados para obtener los valores de los coeficientes m_i y $a_{(ij)kl}$ que mejor ajusten con los datos. Nótese que no se requiere una estimación previa de la masa. Si no existe excitación en el punto i , los argumentos de transmisibilidad nos llevan a una forma apropiada para la ecuación de movimiento de la masa m_i :

$$f'_{ij} \left(\delta_{ij}, \dot{\delta}_{ij} \right) = \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q a'_{(ij)kl} (\delta_{ij})^k (\dot{\delta}_{ij})^l = -\ddot{y}_i, \quad (6.19)$$

donde:

$$a'_{(ij)kl} = \frac{1}{m_i} a_{(ij)kl}.$$

Se denominará a las estructuras que corresponden a la ecuación (6.18) como modelos *no-homogéneos* (p, q) , mientras que aquellas que corresponden a la ecuación (6.19) se denominarán modelos *homogéneos* (p, q) .

En términos de la expansión de coeficientes, la relación de simetría (6.16) llega a ser:

$$a_{(ij)kl} = (-1)^{k+l+1} a_{(ji)kl} \quad (6.20)$$

o:

$$m_i a'_{(ij)kl} = (-1)^{k+l+1} m_j a'_{(ji)kl}. \quad (6.21)$$

De entrada, la inclusión de variables de diferencia permite al modelo localizar no-linealidades; por ejemplo, si un término de la forma $(\delta_{23})^3$ aparece en la expansión apropiada, entonces se puede inferir la presencia de una no-linealidad cúbica de rigidez entre los puntos 2 y 3.

Supóngase ahora que sólo una de las entradas u_i no es igual a cero. Sin pérdida de generalidad se puede tomar a u_1 . Las ecuaciones de movimiento llegan a ser:

$$m_1 \ddot{y}_1 + \sum_{j=1}^N f_{ij}(\delta_{ij}, \dot{\delta}_{ij}) = u_1(t), \quad (6.22)$$

$$\ddot{y}_i + \sum_{j=1}^N f'_{ij}(\delta_{ij}, \dot{\delta}_{ij}) = 0, \quad i = 2, \dots, N. \quad (6.23)$$

Es posible identificar a todos los coeficientes en la ecuación para \ddot{y}_2 , los cuales están afectados por un factor de escala, que en este caso sería la masa desconocida m_2 , misma que estaría dentro de cada f'_{2j} . De manera similar, todos los coeficientes de la ecuación para \ddot{y}_3 pueden ser conocidos, también afectados por un factor de escala en términos de m_3 . Multiplicando a estos últimos coeficientes por la relación m_2/m_3 se les podría escalar respecto a m_2 . Esto significa que ahora los coeficientes de ambas ecuaciones estarían afectados por un factor de escala que depende de m_2 . La relación m_2/m_3 puede ser conocida fácilmente; si existe una liga l_{23} entonces las dos ecuaciones contendrán términos f'_{23} y f'_{32} . Escogiendo un término en particular, como el término lineal de la rigidez, para cada expansión de f' se obtiene utilizando a la ecuación (6.21):

□

$$\frac{m_2}{m_3} = \frac{a'_{(32)10}}{a'_{(23)01}}. \quad (6.24)$$

La escala m_2 puede ser transferida a los coeficientes correspondientes a la ecuación para \ddot{y}_4 utilizando el mismo método si existe una liga l_{24} o l_{34} . De hecho, el factor de escala puede ser transferido a través de todas las ecuaciones, ya que cada masa debe de estar conectada a todas las demás a través de una secuencia de ligas.

Ahora bien, si la ecuación correspondiente para \ddot{y}_1 tiene una entrada, entonces se puede estimar m_1 , la cual puede ser transferida a todas las ecuaciones pudiéndose identificar de esta manera al sistema completo mediante una sola entrada.

Por otro lado, si se restringe a modelos de sistemas lineales, las ecuaciones y la notación pueden ser simplificadas de manera importante. Al sustituir:

$$a_{(ij)01} = \gamma_{ij} \quad (6.25)$$

y:

$$a_{(ij)10} = \mu_{ij} \quad (6.26)$$

en las versiones lineales de las ecuaciones (6.22) y (6.23) se obtiene:

$$m_1 \ddot{y}_1 + \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \dot{\delta}_{ij} + \sum_{j=1}^N \mu_{ij} \delta_{ij} = u_1(t), \quad (6.27)$$

$$\ddot{y}_i + \sum_{j=1}^N \gamma'_{ij} \dot{\delta}_{ij} + \sum_{j=1}^N \mu'_{ij} \delta_{ij} = 0, \quad i = 2, \dots, N, \quad (6.28)$$

donde $\gamma'_{ij} = \gamma_{ij}/m_i$ y $\mu'_{ij} = \mu_{ij}/m_i$.

Si se obtiene la estimación para m_i , γ_{ij} y μ_{ij} , entonces las matrices de rigidez K y amortiguamiento Ξ se recuperan con las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= -\gamma_{ij}, & i \neq j, \\ k_{ij} &= -\mu_{ij}, & i \neq j, \\ c_{ii} &= \sum_{j=1}^N \gamma_{ij}, \\ k_{ii} &= \sum_{j=1}^N \mu_{ij}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Las condiciones de simetría de la ecuación (6.20) llegan a ser:

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}, \quad \mu_{ij} = \mu_{ji}, \quad (6.30)$$

lo cual implica que:

$$c_{ij} = c_{ji}, \quad k_{ij} = k_{ji}, \quad (6.31)$$

lo que nos lleva a que la estructura del modelo obliga a una simetría o condición de reciprocidad en las matrices de amortiguamiento y de rigidez.

6.3. Sistema Teórico de Un Grado de Libertad

El sistema que se pretende identificar consiste en un arreglo simple masa - resorte - amortiguador sometido a una fuerza externa, el cual puede ser descrito por la siguiente ecuación diferencial (6.32). Lo aquí reportado es motivo de la publicación [17].

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = u(t). \quad (6.32)$$

La identificación del sistema a través del Método de Mínimos Cuadrados se realiza mediante la estimación de los parámetros m , c y k partiendo del supuesto de que se cuenta con las mediciones de aceleración, velocidad y desplazamiento, así como de la fuerza excitadora. De acuerdo con lo anterior, el problema de mínimos cuadrados se basa en las siguientes matrices y vectores de acuerdo con la ecuación (6.1).

$$\begin{aligned} \{Y\}_n &= \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \\ \{\beta\} &= \{m \quad c \quad k\}, \\ [A]_n &= \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 & \dot{y}_1 & y_1 \\ \ddot{y}_2 & \dot{y}_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \ddot{y}_n & \dot{y}_n & y_n \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Nota 6.1 Antes de continuar es conveniente recordar que los dos supuestos típicos que se hacen en la estimación de parámetros utilizando el Método de Mínimos Cuadrados son que: la secuencia de regresores $[A]_n$ es una secuencia determinista y que las salidas del modelo quedan descritas por la ecuación (6.1) [27], en donde se supone que en $\{\zeta\}_n$ se encuentran contenidos el ruido presente en las salidas y

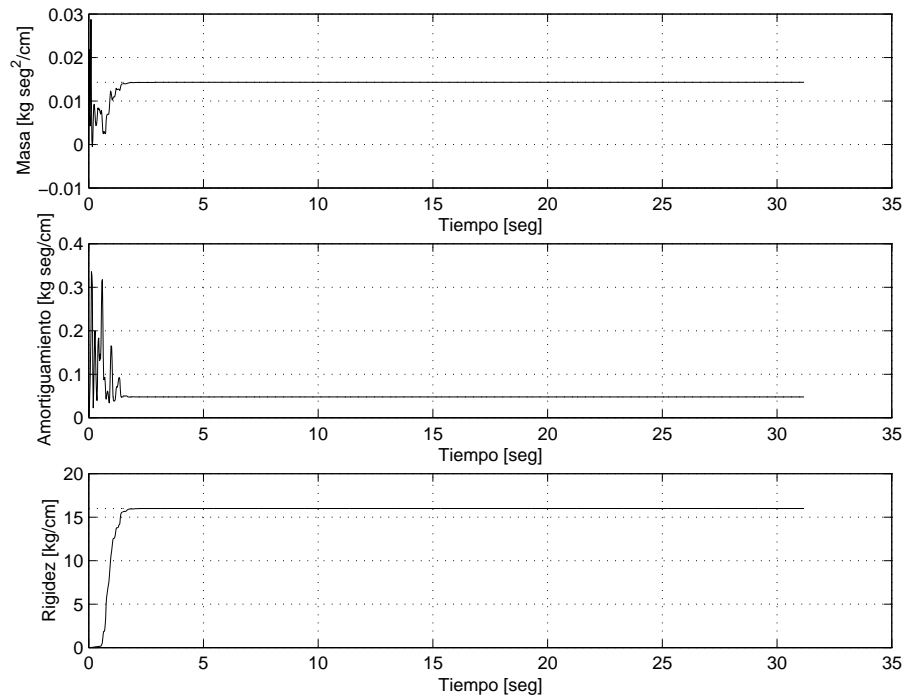
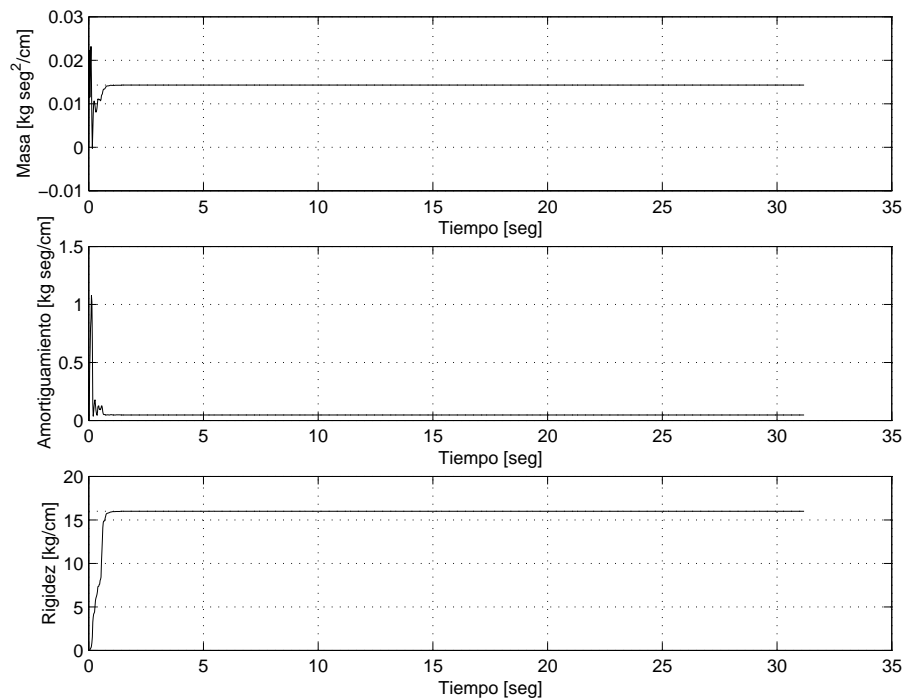
□

una componente de error debida al hecho de que la estimación de los parámetros puede ser incorrecta [54]. De acuerdo a lo mostrado en (6.33), el término $\{\zeta\}_n$ no está siendo considerado en primera instancia, lo cual implica que la esperanza matemática E de las componentes estocásticas queda sin efecto y el límite de la función de criterio a ser minimizada será igual al promedio en el tiempo del error cuadrático, el cual sólo será producto de alguna incorrección en la estimación de los parámetros a partir de la secuencia determinista $[\mathbf{A}]_n$. Si bien esta forma de proceder no es estrictamente correcta, permite obtener valores de los parámetros del modelo que lo ajustan a una situación idealizada, misma que sirve como punto de comparación para observar la efectividad del método. Por otro lado, en las simulaciones posteriores se considera la presencia de ruido blanco en las salidas del sistema, lo cual subsana en parte la falta de rigor aquí señalada.

6.3.1. Simulación Utilizando el Sismo de El Centro

Una vez descritas las ecuaciones básicas del algoritmo recursivo y de la forma en que se ordenan los datos con los que se cuenta en el sistema de un grado de libertad, se procedió a realizar la identificación de los parámetros m , c y k en línea, utilizando como excitación el sismo de El Centro para los mismos tres niveles de ruido blanco que se han venido manejando para este sistema. Adicionalmente se consideraron, para cada nivel de ruido, cuatro combinaciones que involucran al factor de olvido λ y a los valores iniciales de la matriz de covarianza V . En las figuras que a continuación se presentan se muestra con línea punteada al valor teórico del parámetro a identificar, mientras que con línea continua se dibuja el parámetro identificado. En las figuras 6.1, 6.2, 6.3 6.4, 6.5 y 6.6 se muestran los resultados para niveles de ruido blanco de 0 %, 2 % y 5 %, y para las cuatro combinaciones del valor del factor de olvido y valores iniciales de la matriz de covarianza.

Por otra parte, una de las principales bondades de un algoritmo en línea es que abre la posibilidad de observar variaciones en los parámetros del sistema durante el desarrollo del evento. Es por ello que para probar esta posibilidad se realizó la identificación del sistema en línea nuevamente, pero en esta ocasión se simuló una disminución de rigidez en la parte más intensa de la excitación. Esto es, para el sismo de El Centro se supuso que la rigidez del sistema tenía un valor $k = 16$ ton/cm desde el inicio de la excitación hasta el tiempo $t = 15.6$ seg, instante en el cual se simuló una reducción de la rigidez con un nuevo valor $k = 8$ ton/cm. Los resultados de esta identificación se muestran en la figura 6.7 para los tres diferentes niveles de ruido blanco y considerando un valor para el factor de olvido $\lambda = 0.99$ y valores iniciales, $V = 1000$, de la matriz de covarianza P .

(a) $\lambda = 0.95$ y $V = 10$ (b) $\lambda = 0.95$ y $V = 1000$

✎ **Figura 6.1:** Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de El Centro considerando 0% de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.95$.

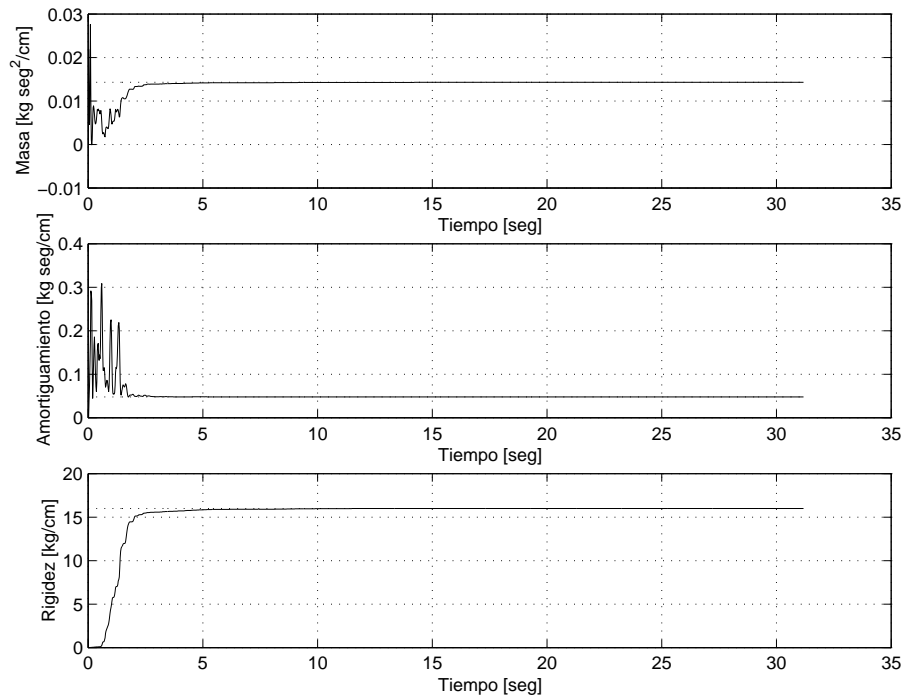
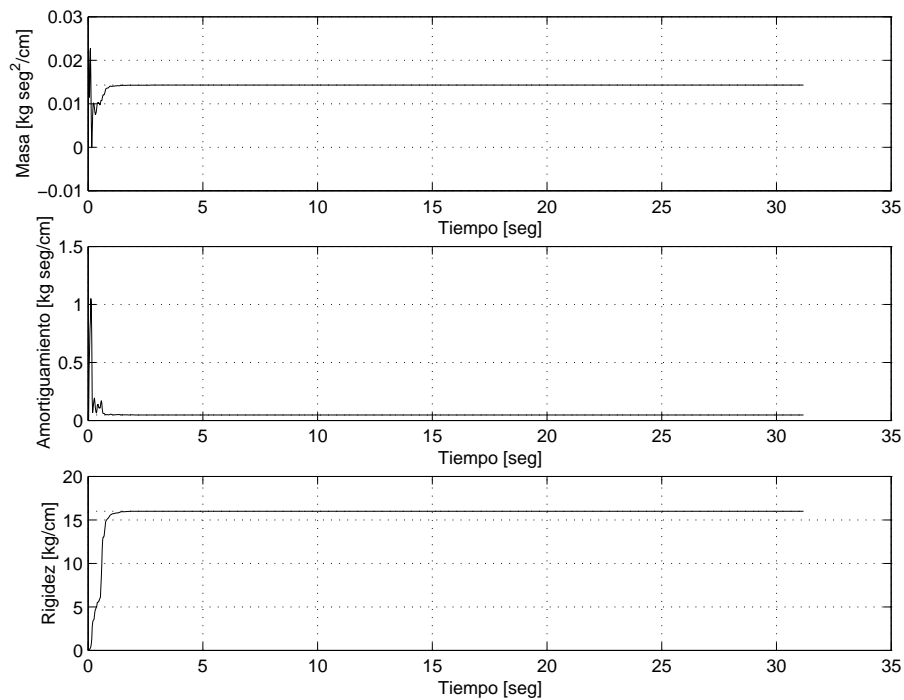
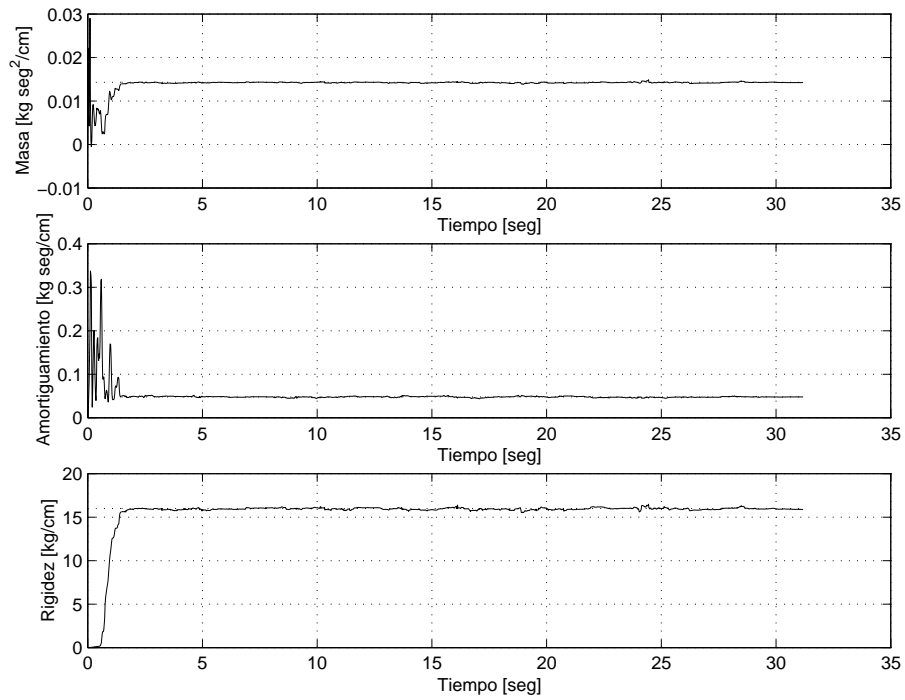
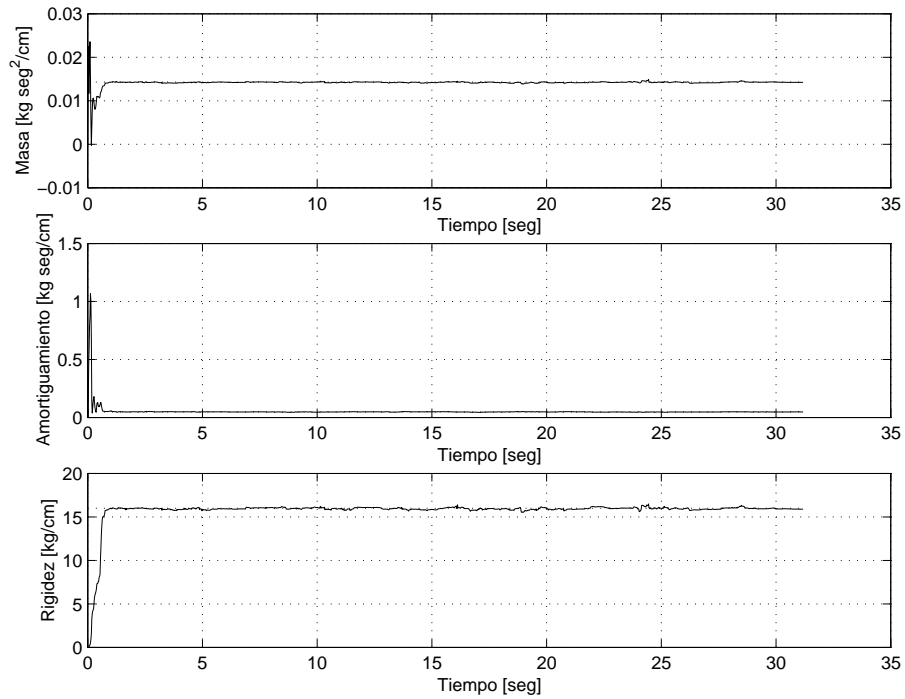

(a) $\lambda = 0.99$ y $V = 10$ (b) $\lambda = 0.99$ y $V = 1000$

Figura 6.2: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de El Centro considerando 0% de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.99$.

(a) $\lambda = 0.95$ y $V = 10$ (b) $\lambda = 0.95$ y $V = 1000$

 **Figura 6.3:** Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de El Centro considerando 2% de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.95$.

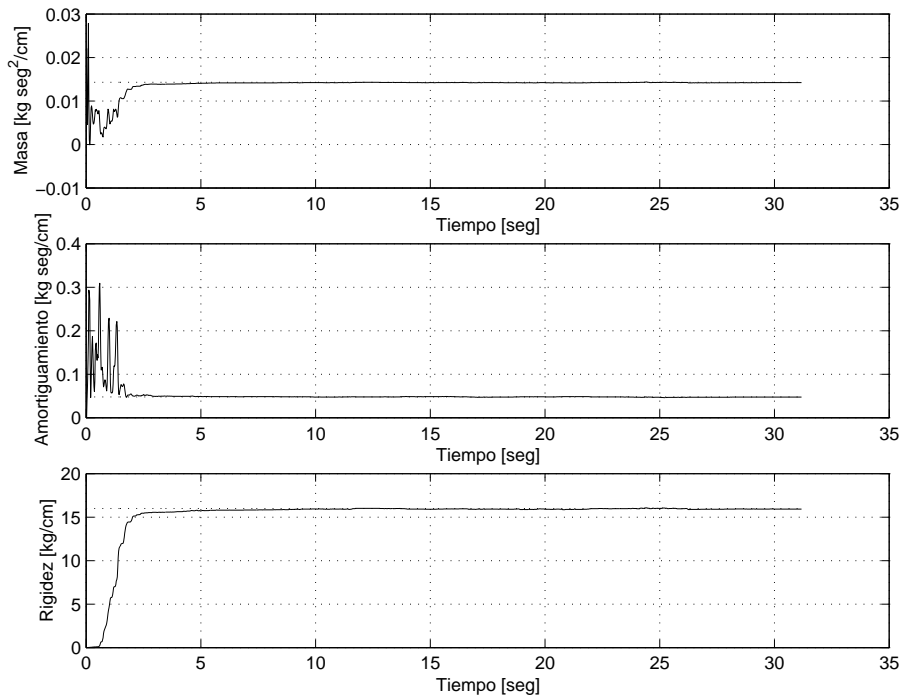
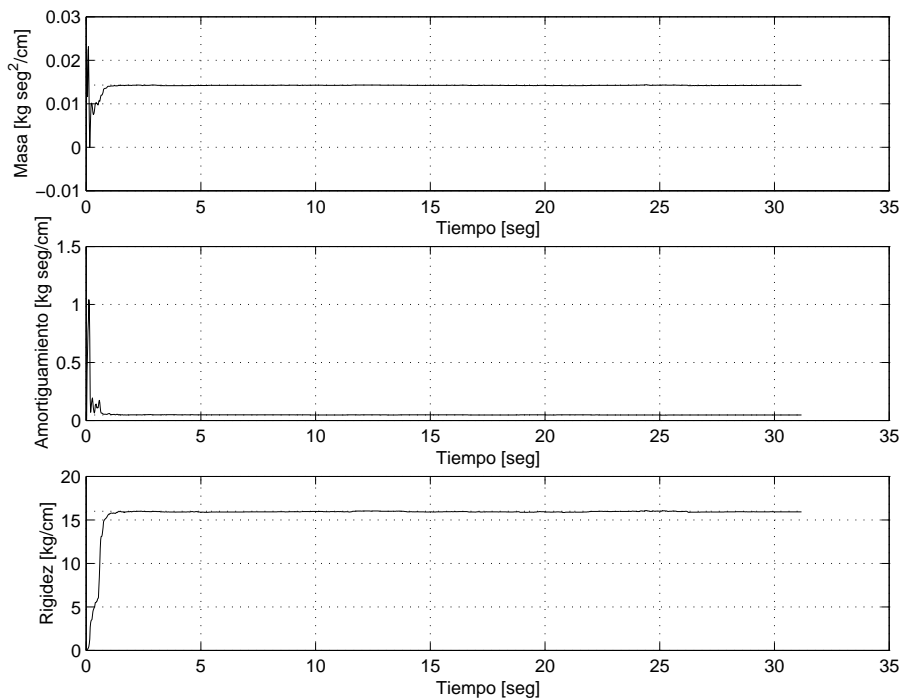
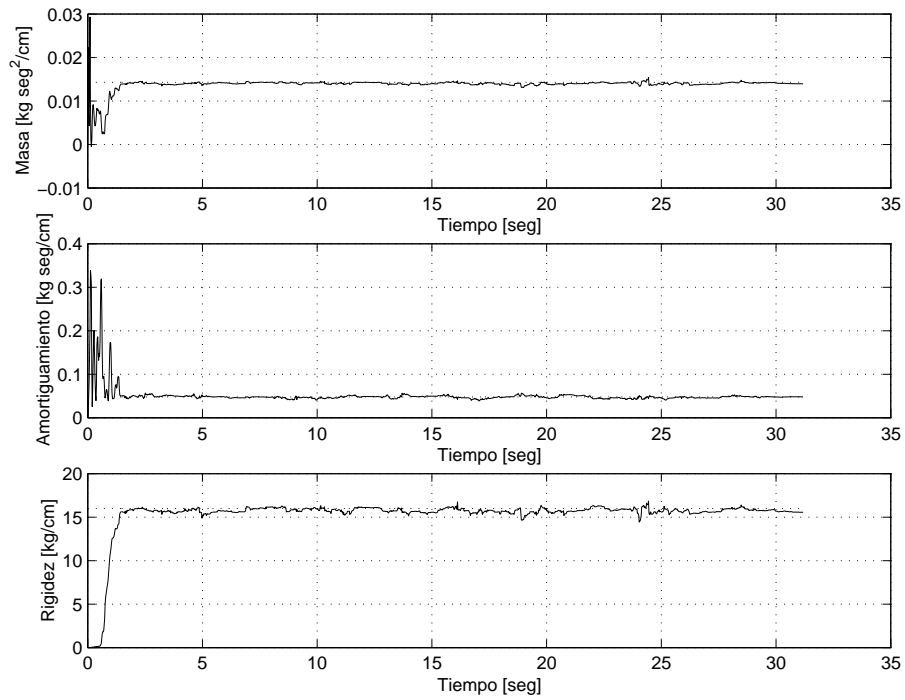
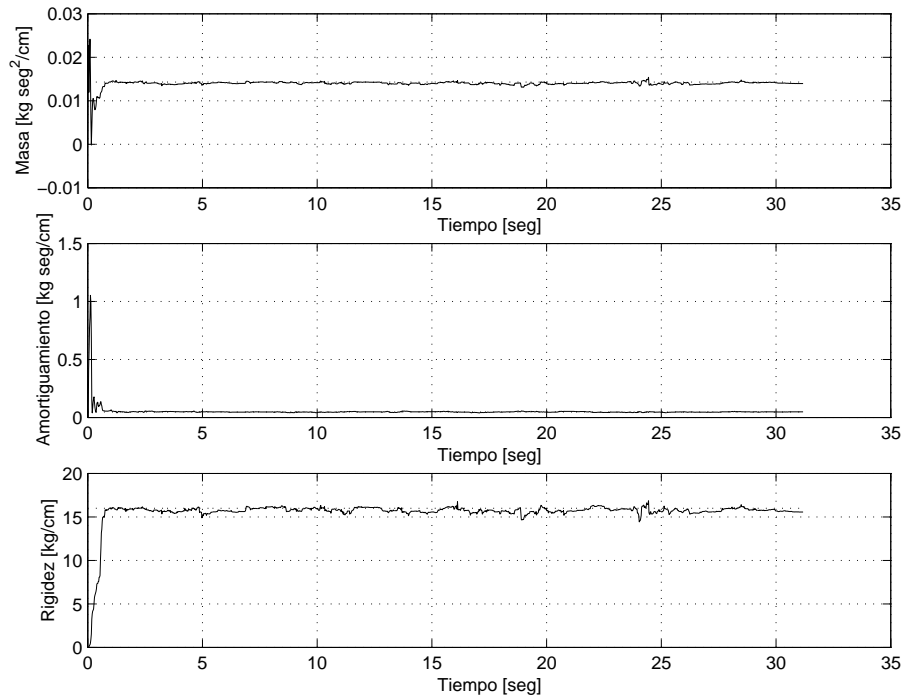
(a) $\lambda = 0.99$ y $V = 10$ (b) $\lambda = 0.99$ y $V = 1000$

Figura 6.4: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de El Centro considerando 2% de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.99$.

(a) $\lambda = 0.95$ y $V = 10$ (b) $\lambda = 0.95$ y $V = 1000$

✎ **Figura 6.5:** Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de El Centro considerando 5% de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.95$.

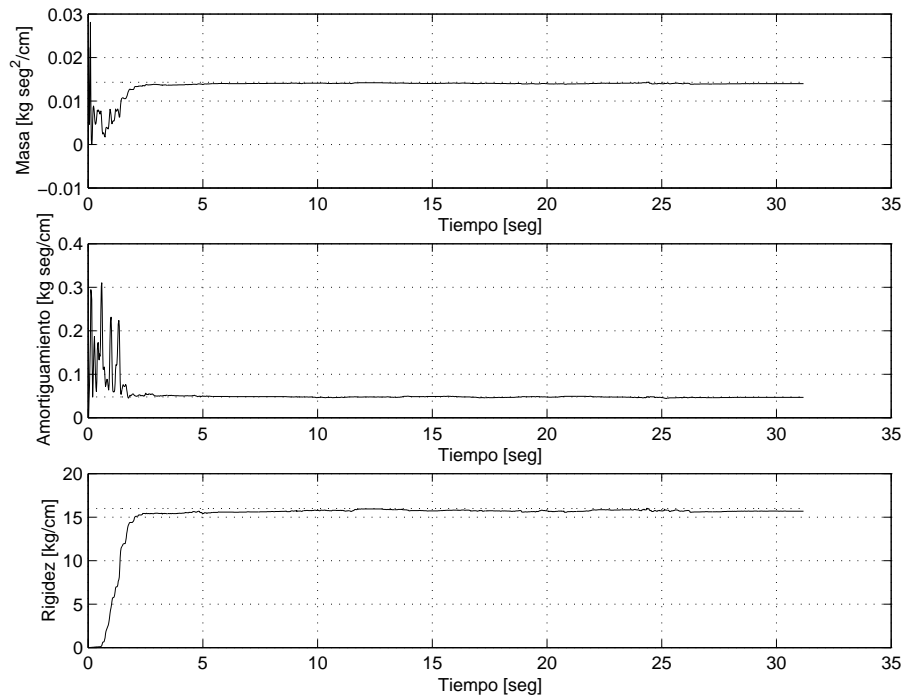
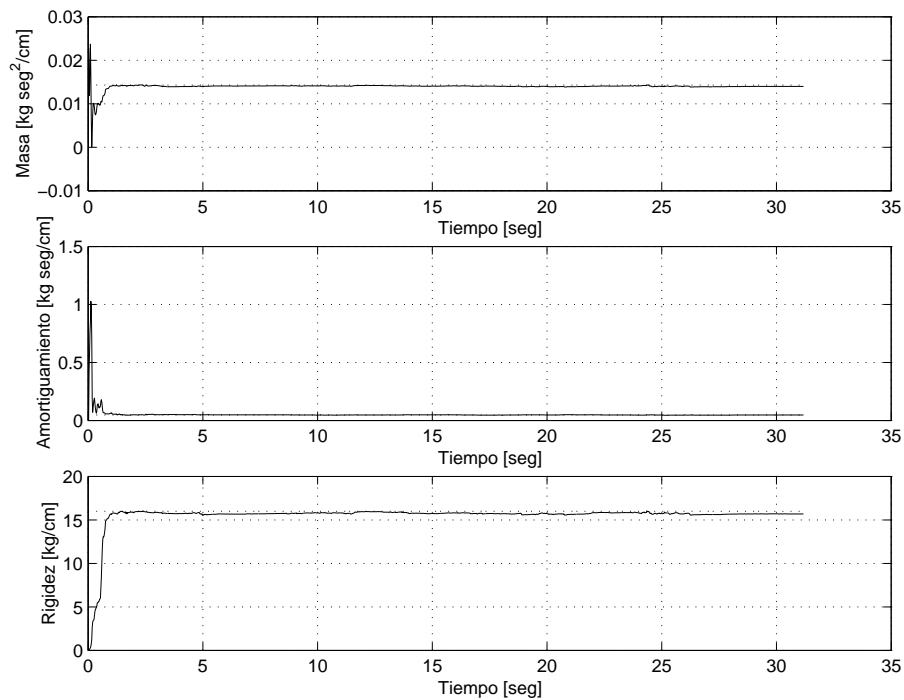
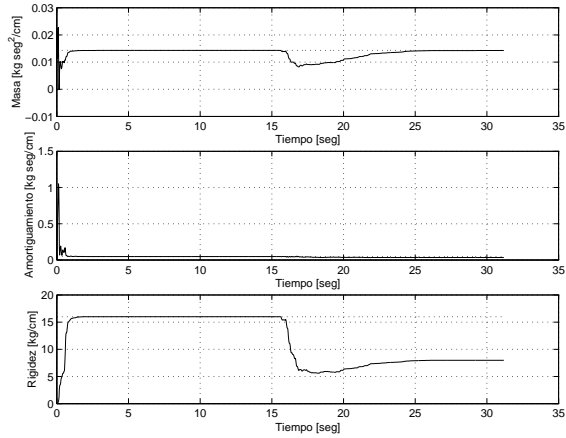
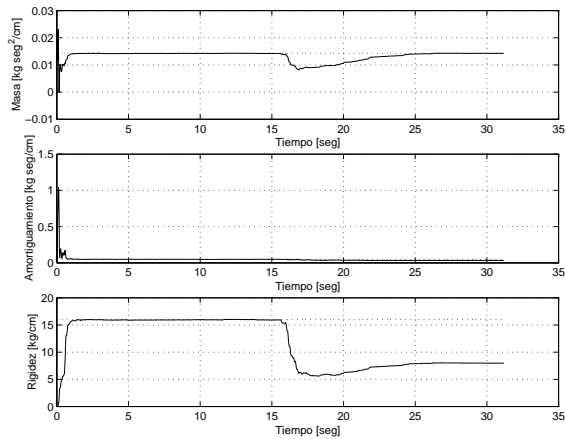
(a) $\lambda = 0.99$ y $V = 10$ (b) $\lambda = 0.99$ y $V = 1000$

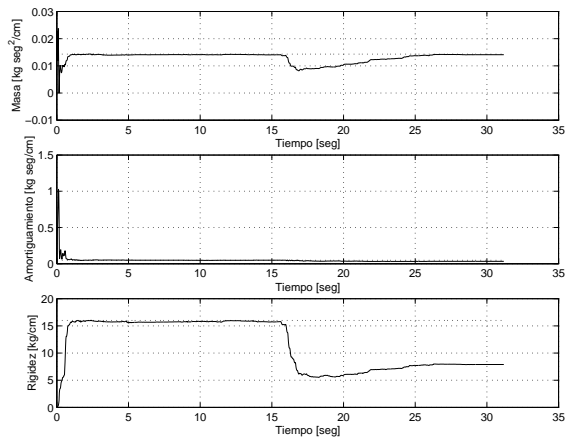
Figura 6.6: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de El Centro considerando 5% de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.99$.




(a) 0% de Nivel de Ruido Blanco



(b) 2% de Nivel de Ruido Blanco



(c) 5% de Nivel de Ruido Blanco


Figura 6.7: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de El Centro y considerando una disminución del 50% en la rigidez.

6.3.2. Simulación Utilizando el Sismo de SCTEO

En las figuras 6.8, 6.9, 6.10, 6.11, 6.12 y 6.13 se muestran los resultados de la identificación cuando se utiliza al sismo de SCTEO como señal excitadora, al igual que para el sismo de El Centro se realizó la identificación para los niveles de ruido blanco de 0 %, 2 % y 5 %, y para las cuatro combinaciones del valor del factor de olvido y valores iniciales de la matriz de covarianza. Al igual que en los casos previos, en las gráficas dibujadas se muestra con línea punteada el valor teórico del parámetro a identificar y con línea continua los resultados de la identificación.

También en este caso se realizó la identificación suponiendo una disminución de la rigidez del 50 % de la original, es decir, en este caso se consideró un valor de la rigidez de $k = 0.14$ ton/cm hasta el tiempo $t = 60.0$ seg, después del cual el valor de la rigidez disminuyó a $k = 0.07$ ton/cm. La figura 6.14 muestra los resultados para los tres niveles de ruido blanco supuestos, y considerando un valor para el factor de olvido $\lambda = 0.99$ y valores iniciales, $V = 1000$, de la matriz de covarianza P .

6.4. Sistema Teórico de Tres Grados de Libertad

Para el sistema de tres grados de libertad se asume que se conocen las fuerzas que actúan sobre cada masa, así como las historias de aceleración, velocidad y desplazamiento en cada una de ellas, por lo que, de acuerdo con las ecuaciones (6.27) y (6.28), las ecuaciones que describen al sistema son las que se muestran en las ecuaciones (6.34), (6.35) y (6.36). Esta sección se basa en lo publicado en [30].

$$m_1\ddot{y}_1 + \gamma_{11}\dot{y}_1 + \gamma_{12}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + \mu_{11}y_1 + \mu_{12}(y_1 - y_2) = u_1(t), \quad (6.34)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + \gamma_{21}(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + \gamma_{22}\dot{y}_2 + \gamma_{23}(\dot{y}_2 - \dot{y}_3) + \mu_{21}(y_2 - y_1) + \mu_{22}y_2 + \mu_{23}(y_2 - y_3) = u_2(t), \quad (6.35)$$

$$m_3\ddot{y}_3 + \gamma_{32}(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + \gamma_{33}\dot{y}_3 + \mu_{32}(y_3 - y_2) + \mu_{33}y_3 = u_3(t). \quad (6.36)$$

Una vez establecidas estas ecuaciones es posible aplicarles de manera individual el método de mínimos cuadrados a cada una de ellas, y se obtendrá como resultado la identificación de los coeficientes γ_{ij} y μ_{ij} . De acuerdo con la ecuación (6.1) el vector $\{Y\}_n$ estará constituido por las fuerzas $u_i(t)$, la matriz $[A]_n$ tendrá como componentes a las relaciones entre $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3, y_1, y_2$ y y_3 , mientras que el vector $\{\beta\}$ será el vector de parámetros a identificar constituido por los coeficientes γ_{ij} y μ_{ij} .

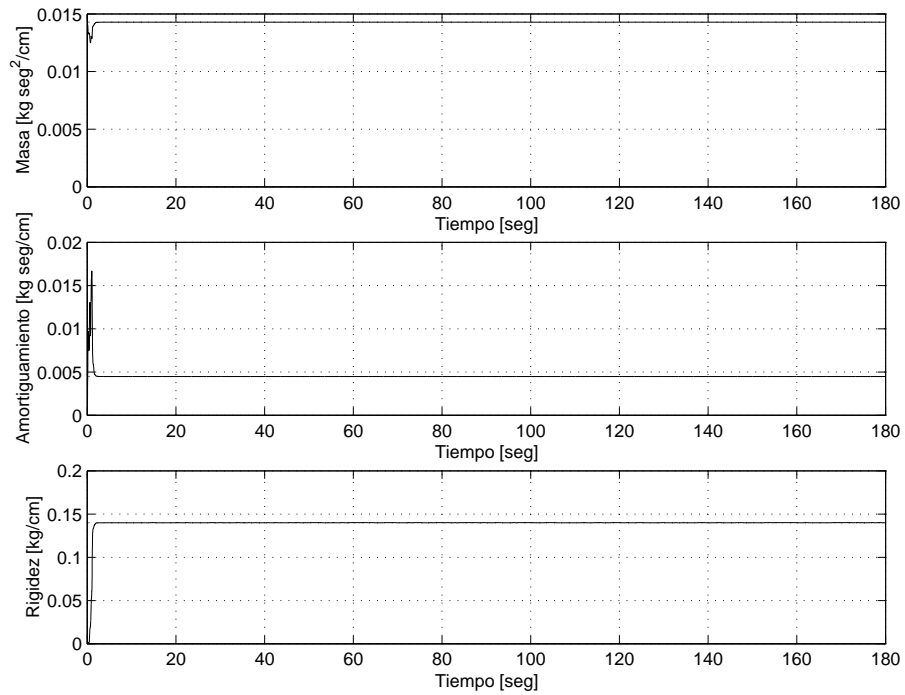
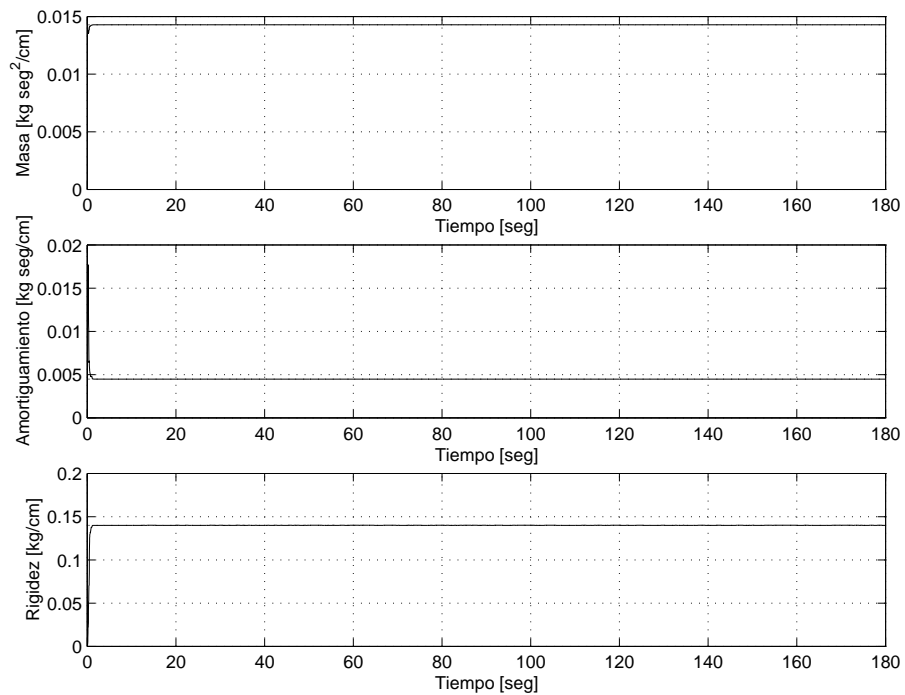
(a) $\lambda = 0.95$ y $V = 10$ (b) $\lambda = 0.95$ y $V = 1000$

Figura 6.8: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de SCTEO considerando 0% de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.95$.

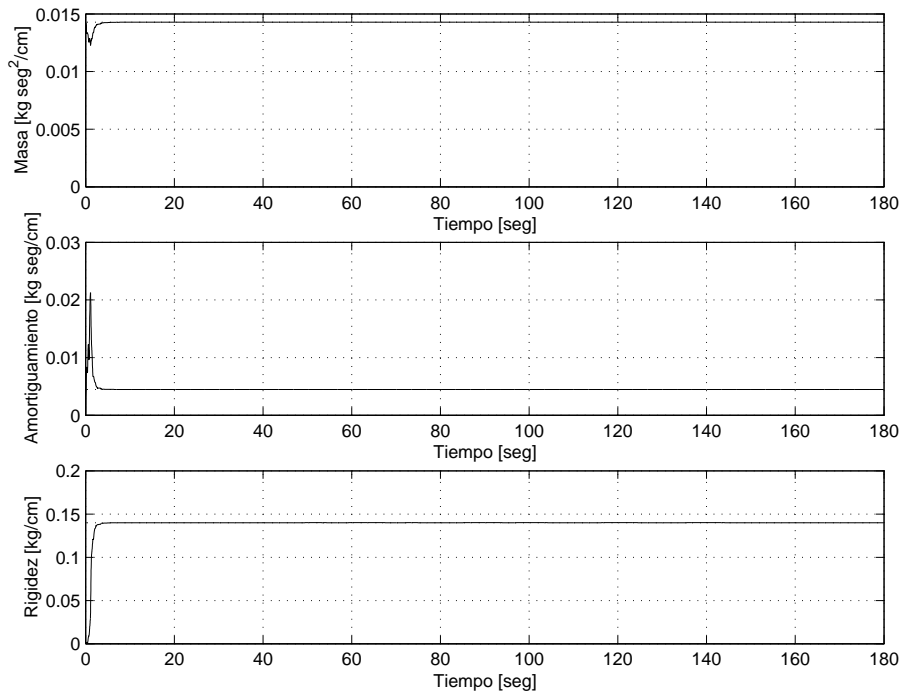
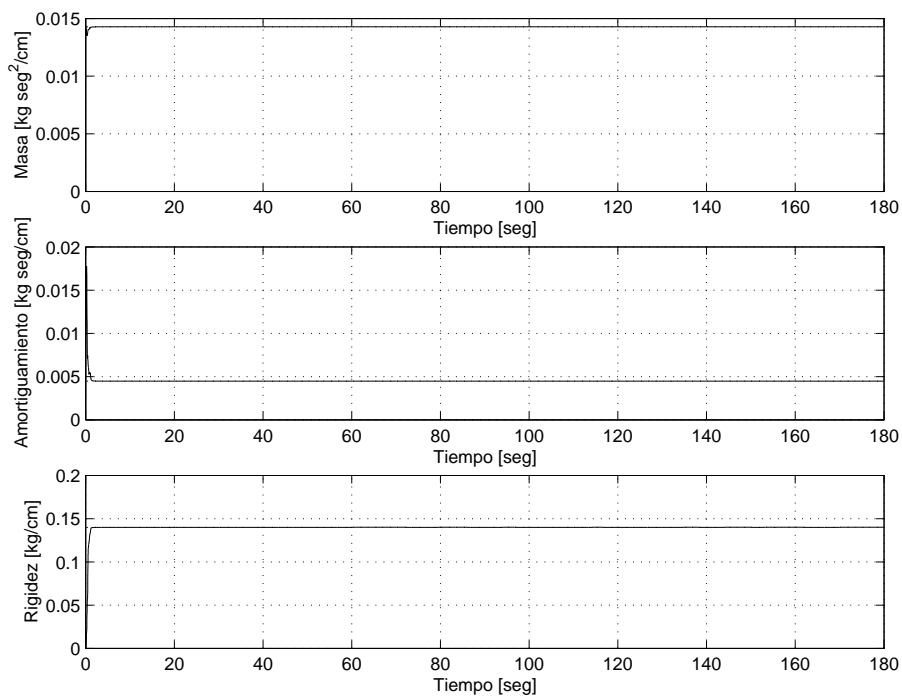
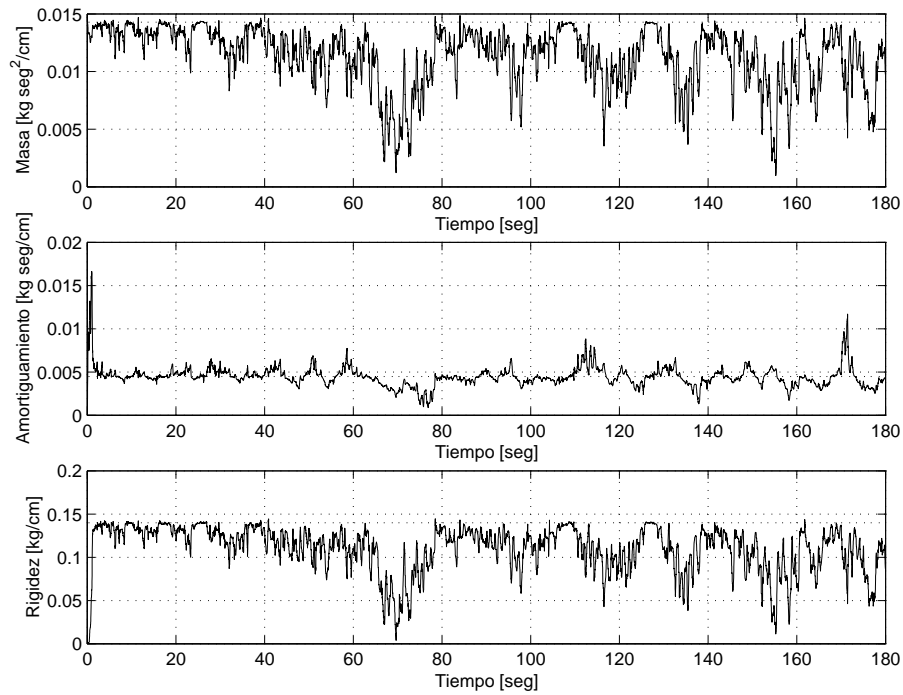
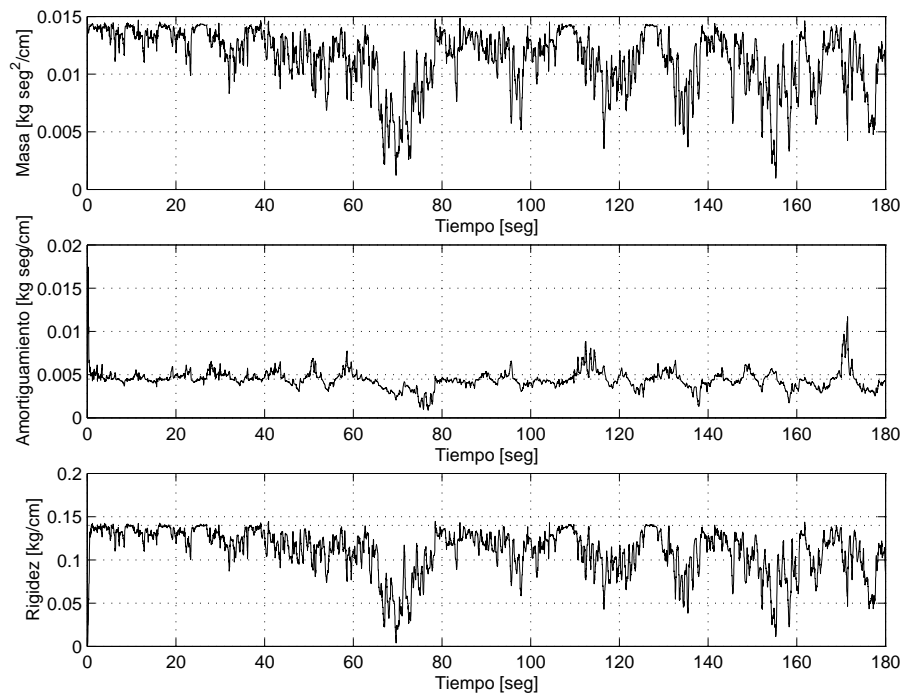

(a) $\lambda = 0.99$ y $V = 10$ (b) $\lambda = 0.99$ y $V = 1000$

Figura 6.9: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de SCTEO considerando 0% de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.99$.

(a) $\lambda = 0.95$ y $V = 10$ (b) $\lambda = 0.95$ y $V = 1000$


Figura 6.10: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de SCTEO considerando 2% de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.95$.

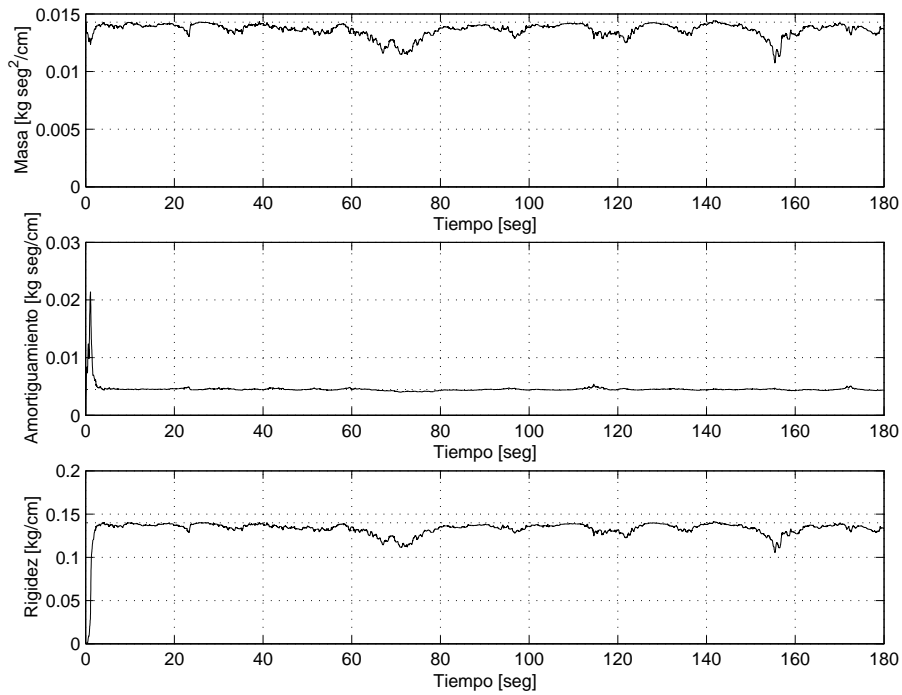
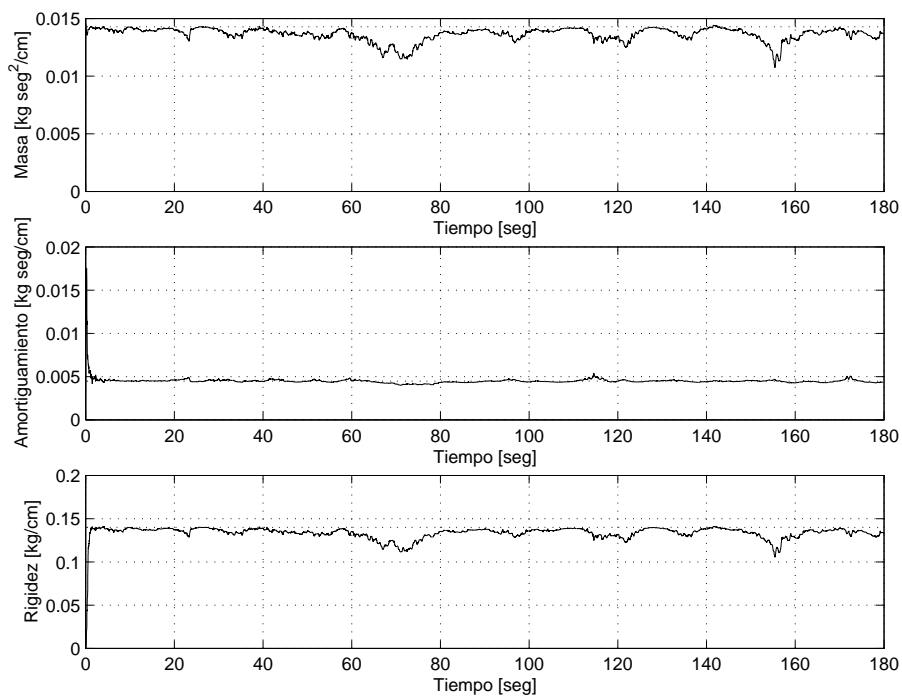
(a) $\lambda = 0.99$ y $V = 10$ (b) $\lambda = 0.99$ y $V = 1000$

Figura 6.11: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de SCTEO considerando 2% de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.99$. ↗

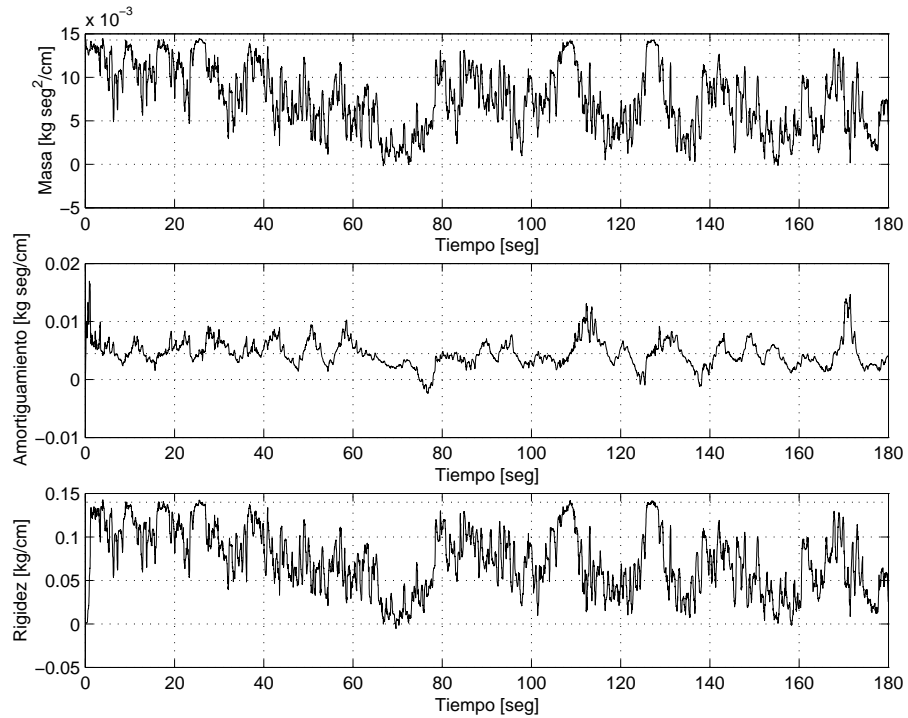
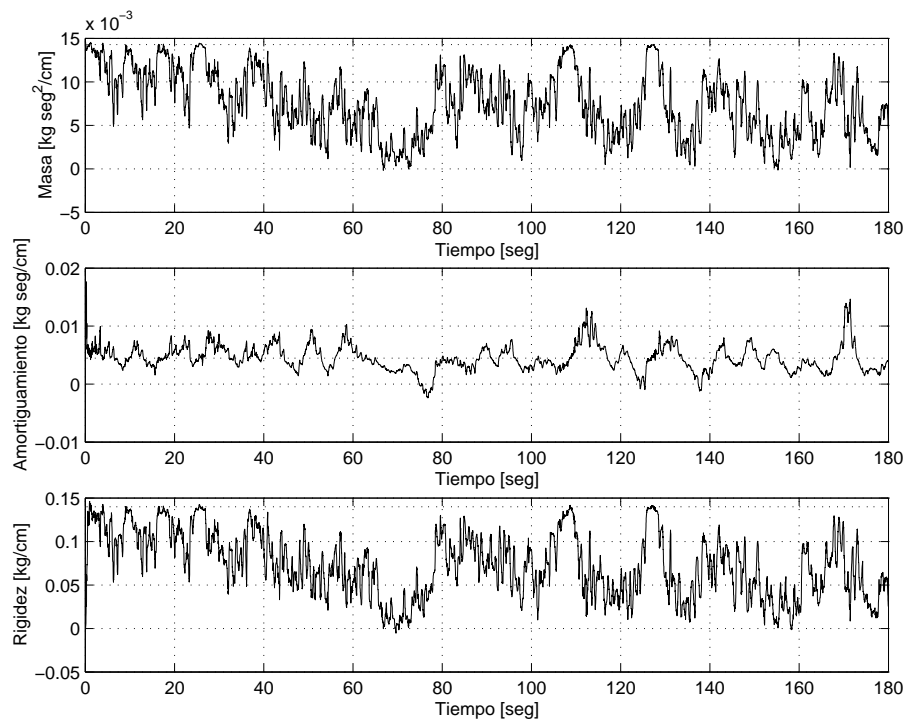
(a) $\lambda = 0.95$ y $V = 10$ (b) $\lambda = 0.95$ y $V = 1000$ 

Figura 6.12: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de SCTEO considerando 5% de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.95$.

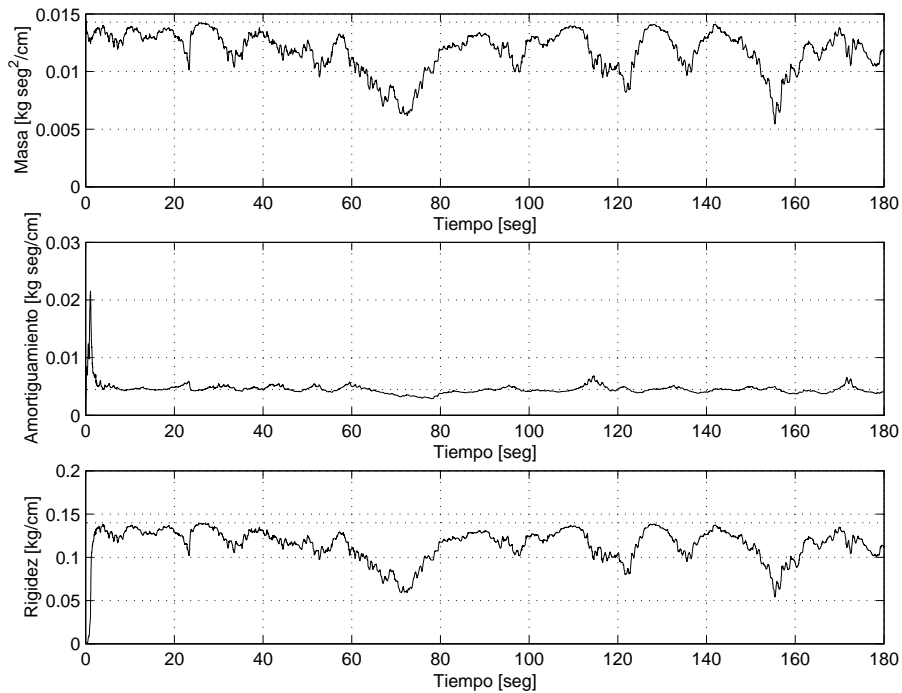
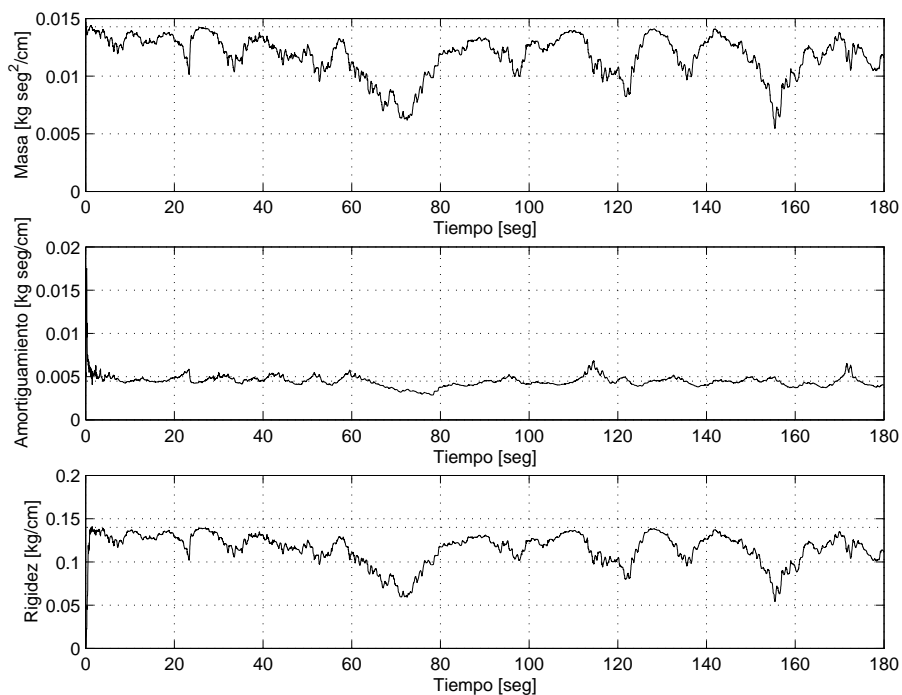
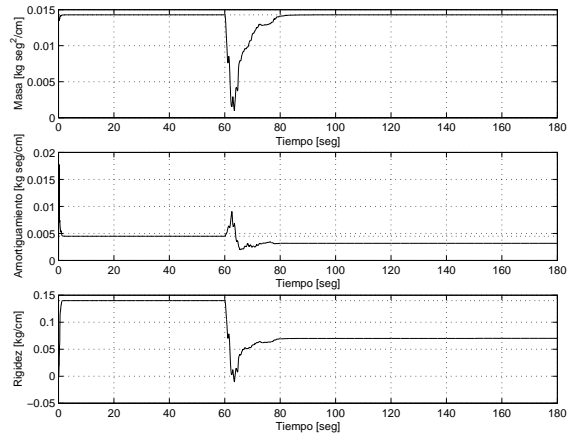
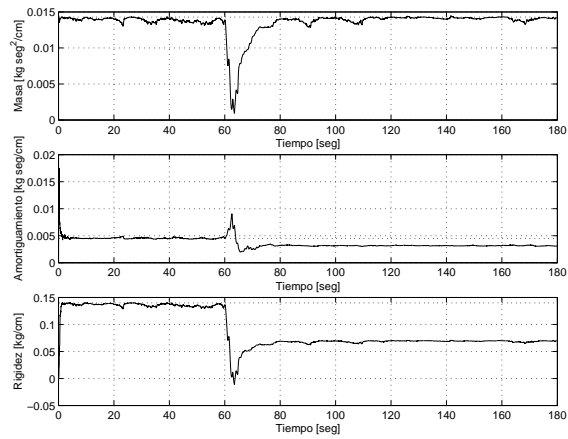
(a) $\lambda = 0.99$ y $V = 10$ (b) $\lambda = 0.99$ y $V = 1000$

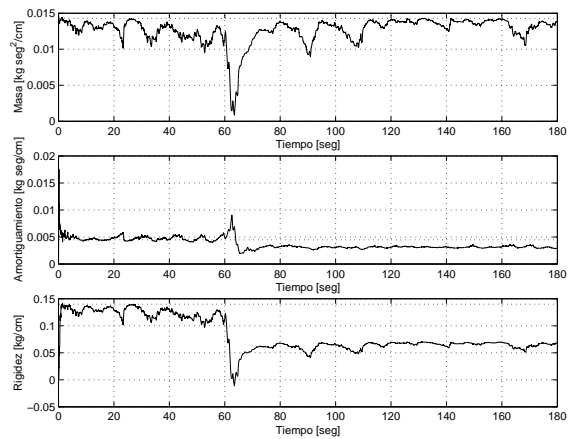
Figura 6.13: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de SCTEO considerando 5% de nivel de ruido blanco y $\lambda = 0.99$. ↗



(a) 0% de Nivel de Ruido Blanco



(b) 2% de Nivel de Ruido Blanco



(c) 5% de Nivel de Ruido Blanco



Figura 6.14: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales de un sistema de un grado de libertad, utilizando el sismo de SCTEO y considerando una disminución del 50% en la rigidez.

A partir de la identificación de los coeficientes mencionados se puede hacer uso de las igualdades de la ecuación (6.29) para obtener los valores de los componentes de las matrices de rigidez y amortiguamiento. Por otro lado, al observar la forma de las matrices de rigidez y amortiguamiento presentadas en la ecuación (2.5), misma que por conveniencia se repite en la ecuación (6.37), se puede concluir que, para el caso en estudio, se cumplen las siguientes igualdades (ecuación (6.38)).

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^3 m_i & 0 & 0 & 0 \\ m_1 & m_1 & 0 & 0 \\ m_2 & 0 & m_2 & 0 \\ m_3 & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} k_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\sum_{i=1}^3 m_i}{h_1} + \frac{\sum_{i=2}^3 m_i}{h_2} \right) & - \left(\frac{\sum_{i=2}^3 m_i}{h_2} \right) & 0 \\ 0 & - \left(\frac{\sum_{i=2}^3 m_i}{h_2} \right) & \left(\frac{\sum_{i=2}^3 m_i}{h_2} + \frac{m_3}{h_3} \right) & - \left(\frac{m_3}{h_3} \right) \\ 0 & 0 & - \left(\frac{m_3}{h_3} \right) & \left(\frac{m_3}{h_3} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ gx_1 \\ gx_2 \\ gx_3 \end{Bmatrix}. \quad (6.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= \gamma_{11}, \\
c_2 &= -\gamma_{21} = \gamma_{12}, \\
c_3 &= -\gamma_{32} = \gamma_{23}, \\
k_1 &= \mu_{11}, \\
k_2 &= -\mu_{21} = \mu_{12}, \\
k_3 &= -\mu_{32} = \mu_{23}. \quad (6.38)
\end{aligned}$$

6.4.1. Simulación Utilizando el Sismo de El Centro

Una vez descritas las ecuaciones básicas del algoritmo recursivo se procede a realizar las identificaciones al igual que en los casos anteriores. En las figuras (6.15),

(6.16) y (6.17) se muestra el resultado de la identificación para el modelo cuyas matrices están definidas por la ecuación (4.19), mostrada nuevamente en la ecuación (6.39). Como se puede observar la semejanza entre los valores estimados y los teóricos es bastante buena en los niveles extremos, aún y cuando se está considerando 5% en el nivel de ruido de la señal, sin embargo en el nivel intermedio se observa que la identificación de la rigidez no es tan buena, esto podría deberse a la interacción¹ de las señales que debe considerarse para la identificación de dicho nivel.

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{bmatrix} 0.0143 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0143 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0143 \end{bmatrix} \frac{\text{kg seg}^2}{\text{cm}}, \\
 K &= \begin{bmatrix} 32.00 & -16.00 & 0.00 \\ -16.00 & 32.00 & -16.00 \\ 0.00 & -16.00 & 16.00 \end{bmatrix} \frac{\text{kg seg}}{\text{cm}}, \\
 \Xi &= \begin{bmatrix} 0.0647 & -0.0190 & -0.0041 \\ -0.0190 & 0.0606 & -0.0231 \\ -0.0041 & -0.0231 & 0.0416 \end{bmatrix} \frac{\text{kg}}{\text{cm}}.
 \end{aligned} \tag{6.39}$$

6.4.2. Simulación Utilizando el Sismo de SCTEO

También se llevó a cabo la identificación del sistema utilizando al registro del sismo de SCTEO como excitación; al igual que en las identificaciones anteriores se está considerando que la señal se encuentra afectada por un nivel de ruido blanco de 5%. En las figuras (6.18), (6.19) y (6.20) se muestra el resultado de la identificación para el modelo cuyas matrices están definidas también por la ecuación (6.39). En las gráficas dibujadas se puede observar la cercanía que existe entre los valores teóricos y los valores identificados, en este caso en todos los tres grados de libertad del sistema.

¹Como puede observarse en la ecuación (6.35), es en el nivel intermedio en donde se relacionan entre sí las salidas de los tres niveles del modelo, ya que es necesario calcular los desplazamientos y las velocidades relativas de los niveles 1 y 3, respecto de los desplazamientos y las velocidades del nivel 2, para formar al renglón correspondiente a este nivel en la matriz $[\mathbf{A}]_n$. Esto no ocurre con las ecuaciones (6.34) y (6.36) por no estar conectados directamente entre ellos los niveles extremos.

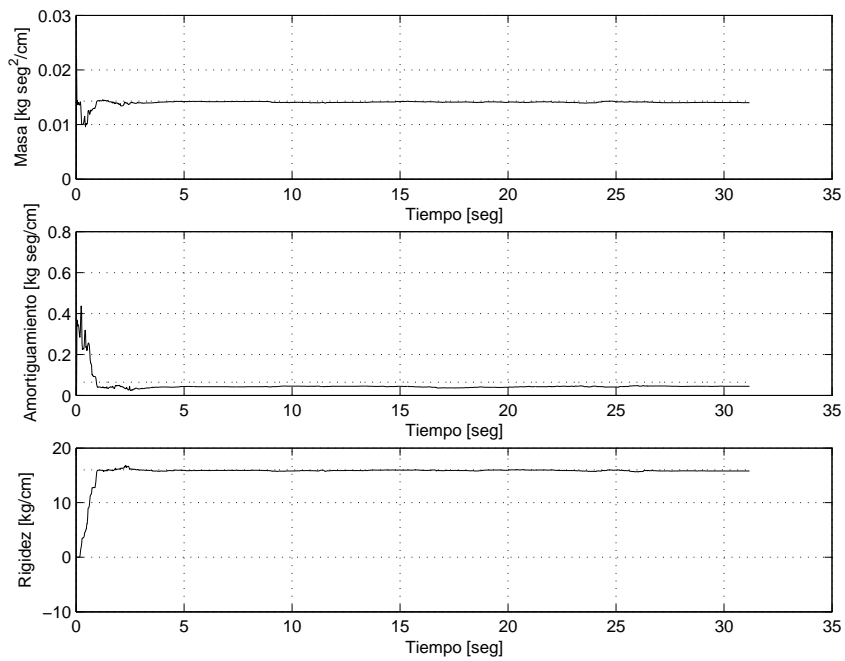


Figura 6.15: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales del primer nivel de un sistema de tres grados de libertad, utilizando el sismo de El Centro y considerando 5% de nivel de ruido blanco.

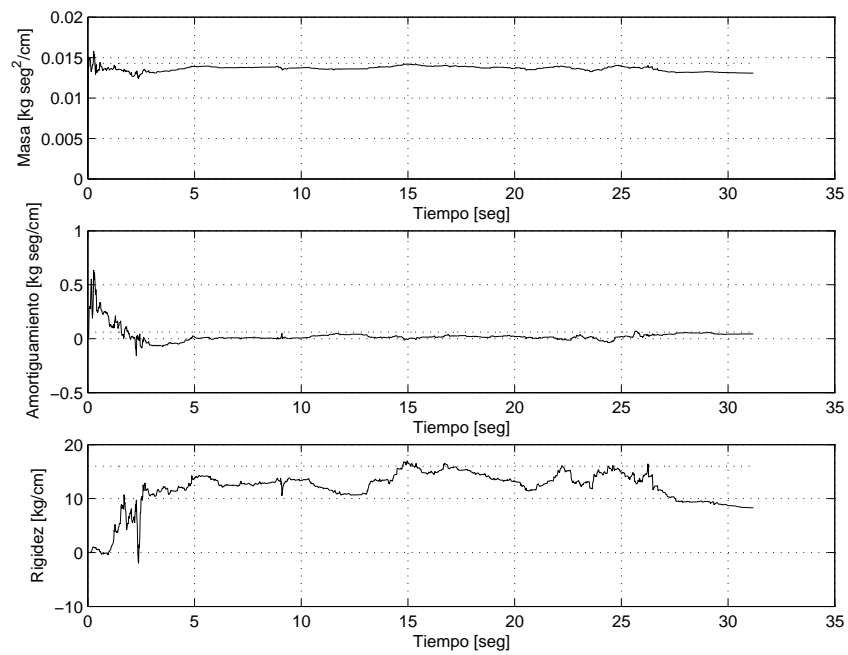


Figura 6.16: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales del segundo nivel de un sistema de tres grados de libertad, utilizando el sismo de El Centro y considerando 5% de nivel de ruido blanco.

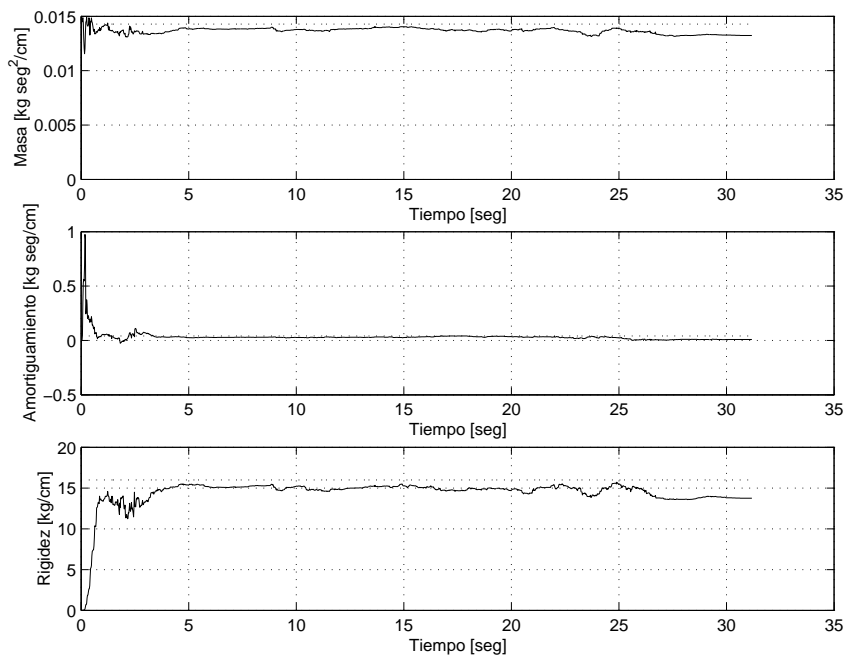


Figura 6.17: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales del tercer nivel de un sistema de tres grados de libertad, utilizando el sismo de El Centro y considerando 5% de nivel de ruido blanco.

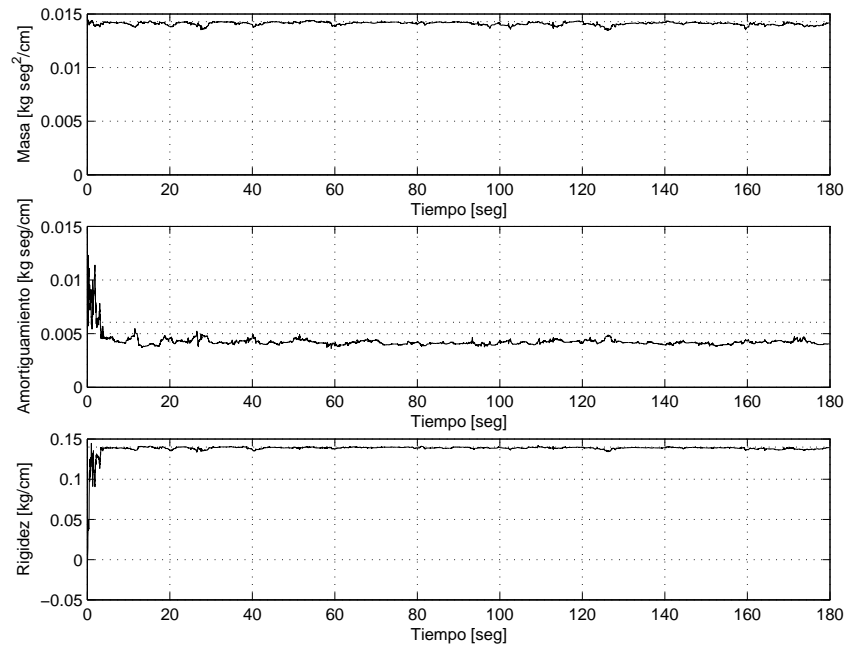


Figura 6.18: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales del primer nivel de un sistema de tres grados de libertad, utilizando el sismo de SCTEO y considerando 5% de nivel de ruido blanco.

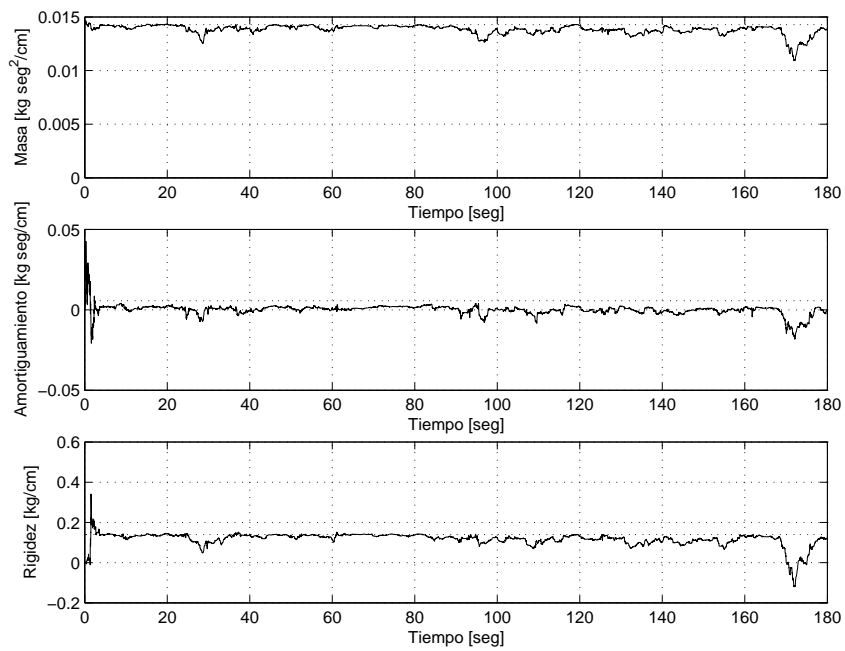


Figura 6.19: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales del segundo nivel de un sistema de tres grados de libertad, utilizando el sismo de SCTEO y considerando 5% de nivel de ruido blanco.

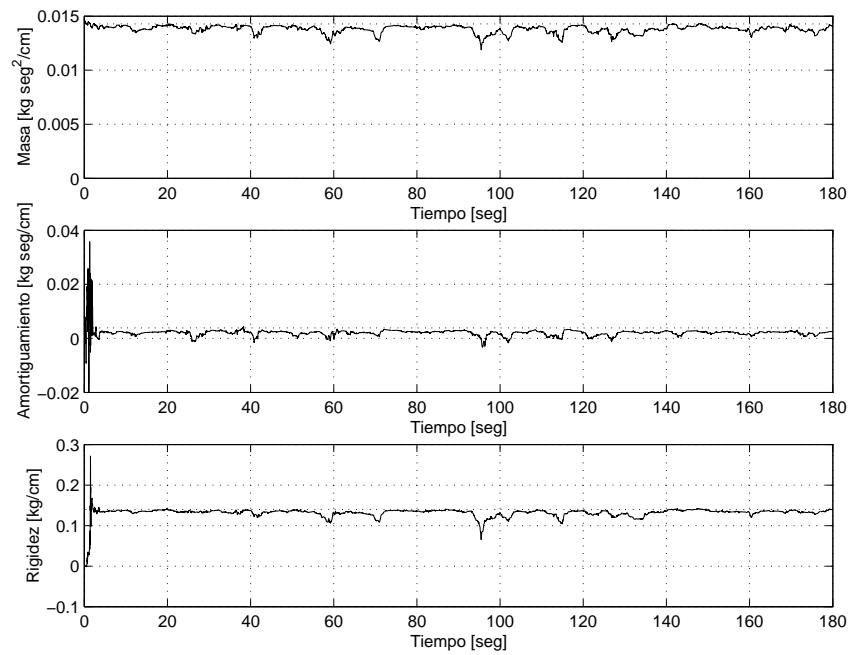


Figura 6.20: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales del tercer nivel de un sistema de tres grados de libertad, utilizando el sismo de SCTEO y considerando 5% de nivel de ruido blanco.

6.5. Edificio Instrumentado

Esta sección se basa en lo publicado en [30]. Debido a la complejidad del comportamiento de una estructura real, que aunque en el caso que nos ocupa está siendo modelada como un sistema de tres grados de libertad, la interacción entre los tres *niveles equivalentes* considerados no resulta ser tan obvia como en el modelo teórico de tres grados de libertad, por lo que se consideró que el conjunto de ecuaciones que describe el comportamiento del sistema tiene una forma similar a la descrita por las ecuaciones (6.40), (6.41) y (6.42) en las que se considera la interacción de todos los grados de libertad equivalentes entre sí. No obstante lo anterior, aquí se genera una línea de investigación adicional respecto a la forma que deben tener las ecuaciones diferenciales de segundo orden, que describan fielmente a un sistema real mediante un sistema reducido.

$$m_1\ddot{y}_1 + \gamma_{11}\dot{y}_1 + \gamma_{12}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + \gamma_{13}(\dot{y}_1 - \dot{y}_3) + \mu_{11}y_1 + \mu_{12}(y_1 - y_2) + \mu_{13}(y_1 - y_3) = u_1(t), \quad (6.40)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + \gamma_{21}(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + \gamma_{22}\dot{y}_2 + \gamma_{23}(\dot{y}_2 - \dot{y}_3) + \mu_{21}(y_2 - y_1) + \mu_{22}y_2 + \mu_{23}(y_2 - y_3) = u_2(t), \quad (6.41)$$

$$m_3\ddot{y}_3 + \gamma_{31}(\dot{y}_3 - \dot{y}_1) + \gamma_{32}(\dot{y}_3 - \dot{y}_2) + \gamma_{33}\dot{y}_3 + \mu_{31}(y_3 - y_1) + \mu_{32}(y_3 - y_2) + \mu_{33}y_3 = u_3(t). \quad (6.42)$$

Aplicando el método de los mínimos cuadrados de manera individual sobre cada una de las ecuaciones anteriores, y procediendo de forma similar a lo realizado para el sistema teórico de tres grados de libertad, es posible identificar los parámetros estructurales de los tres niveles equivalentes del edificio instrumentado. En las figuras (6.21), (6.22) y (6.23) se muestran los resultados de esta identificación en la dirección transversal utilizando el sismo del 21 de enero de 2003. Las trazas obtenidas permiten ver que no se logra identificar a los parámetros satisfactoriamente.

En las figuras (6.24), (6.25) y (6.26) se muestran los resultados de la identificación del edificio en dirección longitudinal utilizando también el sismo del 21 de enero de 2003 como excitación. Tampoco en este caso se logra identificar a los parámetros satisfactoriamente.

Las figuras mostradas permiten observar que el algoritmo no da muy buenos resultados en el caso del edificio real, esto se ve claramente en la identificación de las masas, ya que ninguno de los valores a los que se llega coincide con los valores teóricos supuestos. Por otro lado, los valores obtenidos para las rigideces no se encuentran dentro del rango esperado para este tipo de inmuebles.

Lo anterior puede derivarse de dos situaciones principalmente. La primera de ellas es la representación simplificada que se ha hecho del edificio real por medio de

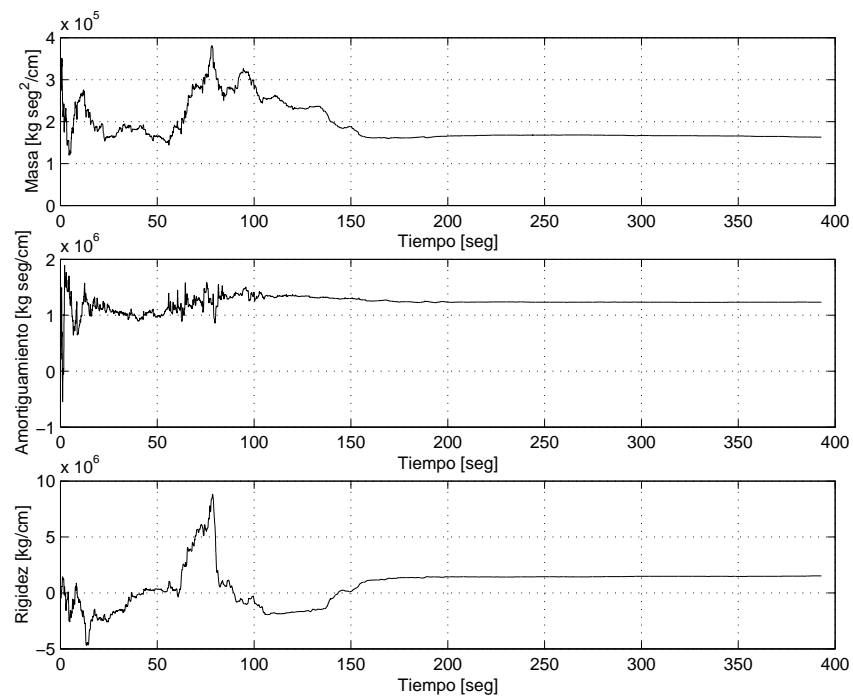


Figura 6.21: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales en la dirección transversal del primer nivel equivalente del edificio parcialmente instrumentado, utilizando el sismo del 21 de enero de 2003.

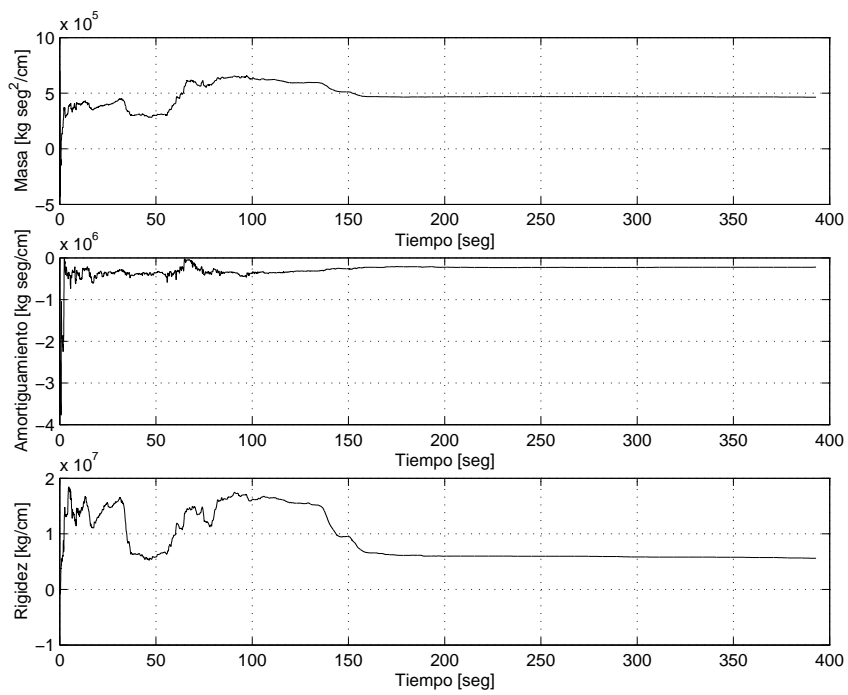


Figura 6.22: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales en la dirección transversal del segundo nivel equivalente del edificio parcialmente instrumentado, utilizando el sismo del 21 de enero de 2003.

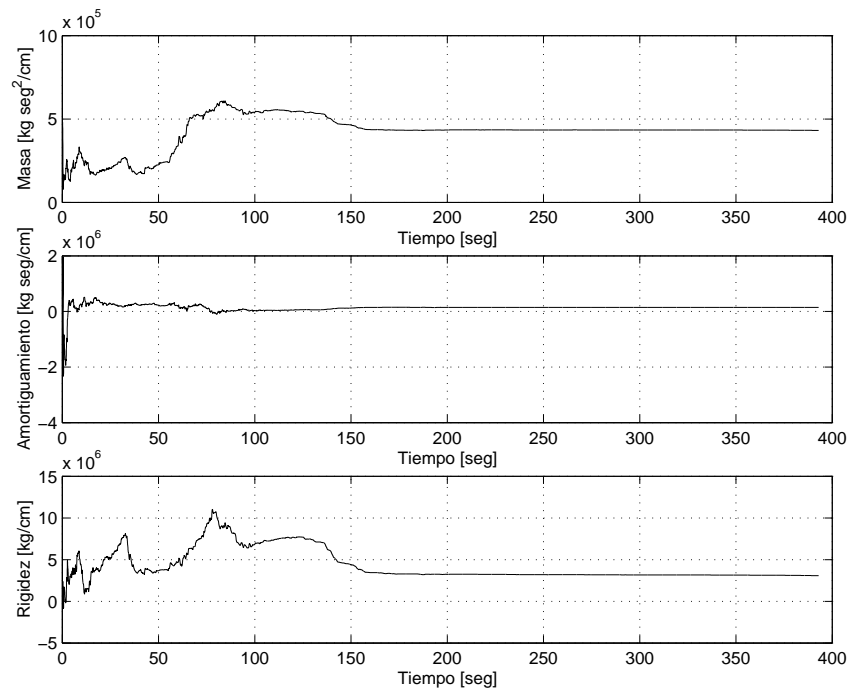


Figura 6.23: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales en la dirección transversal del tercer nivel equivalente del edificio parcialmente instrumentado, utilizando el sismo del 21 de enero de 2003.

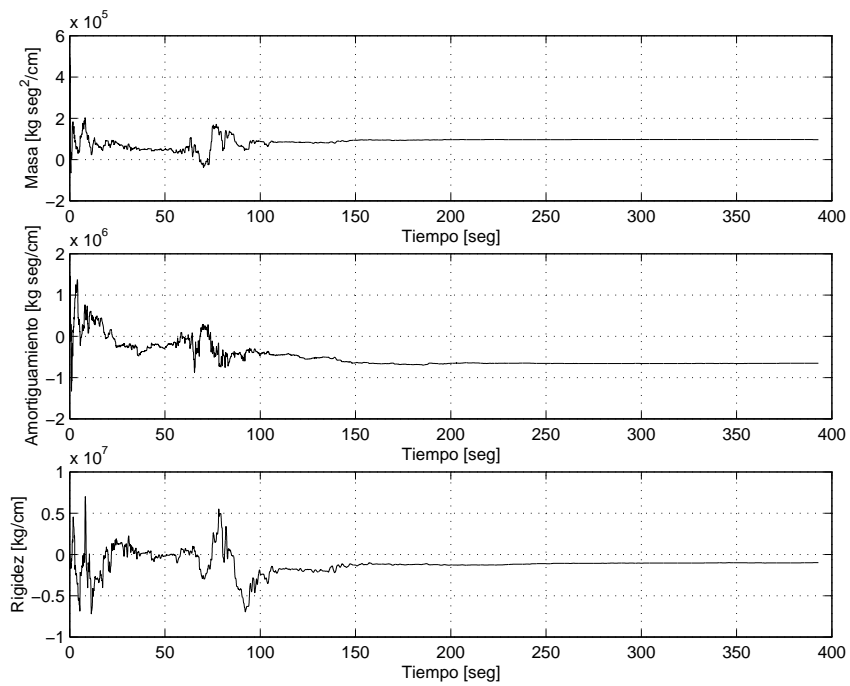


Figura 6.24: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales en la dirección longitudinal del primer nivel equivalente del edificio parcialmente instrumentado, utilizando el sismo del 21 de enero de 2003.

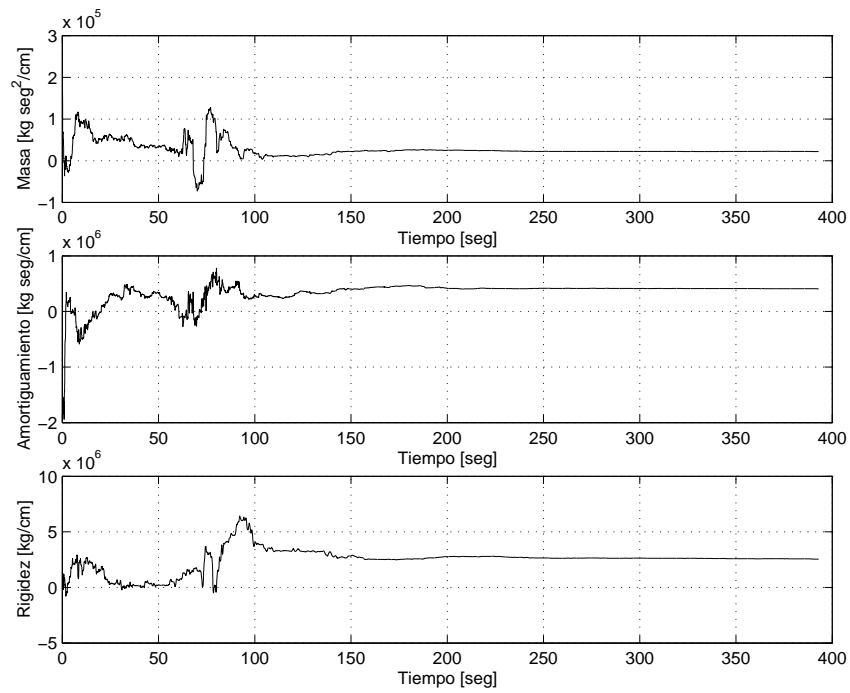


Figura 6.25: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales en la dirección longitudinal del segundo nivel equivalente del edificio parcialmente instrumentado, utilizando el sismo del 21 de enero de 2003.

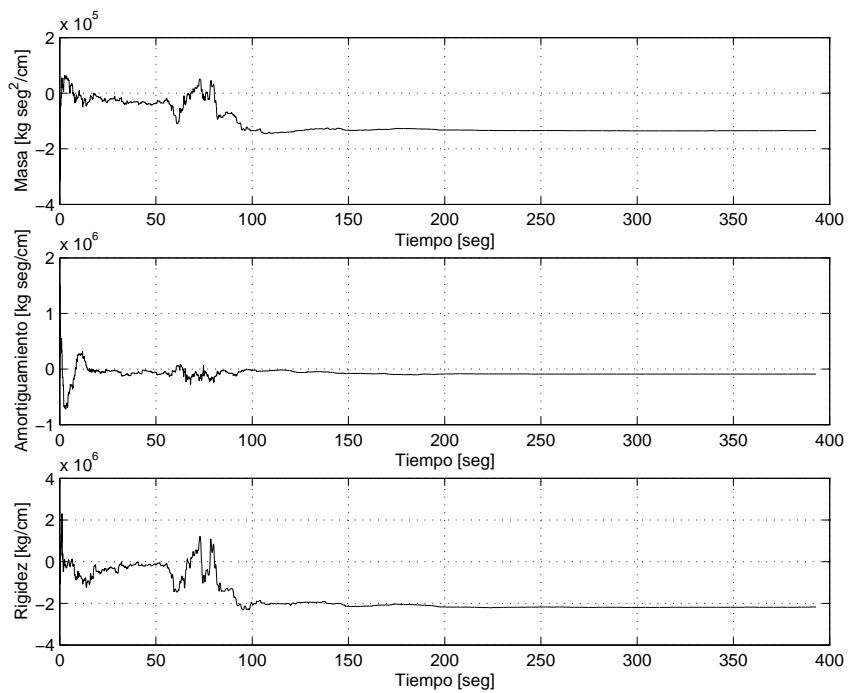


Figura 6.26: Identificación en línea, mediante el Método de Mínimos Cuadrados, de parámetros estructurales en la dirección longitudinal del tercer nivel equivalente del edificio parcialmente instrumentado, utilizando el sismo del 21 de enero de 2003.

sólo tres niveles, lo cual a su vez tiene su origen en el número de sensores con que se cuenta en el inmueble, o bien, a su ubicación dentro del mismo. Por otro lado, una segunda explicación de los resultados obtenidos puede ser el algoritmo del método de mínimos cuadrados que se está utilizando, tal vez en este caso conviene utilizar un algoritmo no lineal en el que se tomen en cuenta, de manera más específica, las relaciones existentes entre las diferentes variables que definen el comportamiento dinámico del inmueble. Una opción es el utilizar el algoritmo Recursivo de Mínimos Cuadrados Extendido [35], conocido en inglés como *Recursive Pseudo-Linear Regression*, el cual formalmente es idéntico al algoritmo lineal recursivo de mínimos cuadrados, salvo que no parte de suponer que el modelo tiene la forma general autoregresiva con entradas exógenas (ARX), sino que supone que el modelo tiene la forma general autoregresiva de promedio móvil con entradas exógenas, comúnmente conocida como *autoregressive moving average with exogenous input* (ARMAX por sus siglas en inglés), y que es no lineal en sus parámetros. Este algoritmo converge mucho más lentamente que el algoritmo lineal recursivo de mínimos cuadrados, lo cual se puede explicar por el hecho de que requiere, dentro del procedimiento de estimación de parámetros, una aproximación del ruido blanco. Cabe mencionar que la razón para no haber utilizado este algoritmo en el presente estudio se basa en el enfoque mismo de la investigación, la cual se acotó a la identificación de sistemas lineales.

6.6. Conclusiones

La identificación de los parámetros físicos de masa, amortiguamiento y rigidez es muy buena tanto para el sistema de un grado de libertad como para el de tres grados de libertad. En este último caso para niveles grandes de ruido comienza a haber dificultades para que converjan los parámetros, sin embargo, mediante la manipulación de los valores del factor de olvido y de los valores iniciales de la matriz de covarianza es posible obtener buenos resultados. Aquí es importante recordar que entre menor sea el valor del factor de olvido, más rápidamente responde el algoritmo a los cambios, sin embargo, si el factor de olvido es muy pequeño la estimación puede llegar a ser muy susceptible ante la presencia de variaciones espurias debidas a ruido.

Por otro lado, el Método de Mínimos Cuadrados no da buenos resultados en la identificación del edificio instrumentado. En este caso es probable que la estructura seleccionada para el modelo no sea lo suficientemente completa para describirlo, o bien, que también en este caso el algoritmo no sea eficaz con el tipo de señal utilizado, ya sea por el nivel de ruido que contiene o por su contenido de frecuencias. Como se mencionó anteriormente, la ventaja de obtener directamente a los parámetros físicos mediante la identificación, lleva como contraparte la necesidad

de conocer a la estructura del sistema; en el caso del edificio instrumentado surgen dos complicaciones, la primera de ellas es que tal vez se requiera de una estructura más compleja en la que interactúen las masas entre sí y no sólo las conectividades entre ellas, ahora bien, aún bajo el supuesto de que se pueda salvar este aspecto, se plantea la necesidad de establecer un procedimiento inverso que lleve de las matrices estimadas equivalentes a matrices que permitan detectar fallas de manera más específica por nivel, es decir, a matrices en las que se vean reflejadas las características de todos los niveles que conforman a la estructura, al menos, bajo el supuesto de que presenta un comportamiento de edificio de cortante, en el que únicamente se tomen en cuenta los desplazamientos laterales y se desprecien los giros en las conectividades.

Capítulo 7

Propuesta para la Obtención de Matrices de Rigidez Equivalentes

7.1. Introducción

Si bien es cierto que la identificación de parámetros modales es un paso importante en la identificación de sistemas mecánicos como las estructuras civiles, se tienen diversas experiencias de lo limitado que resulta ser su uso para la detección de fallas en sistemas tan grandes y complejos como los puentes y edificios. Por lo anterior, existe la necesidad de desarrollar técnicas que, a partir de la identificación de los parámetros modales, permitan generar criterios para la detección e identificación de fallas en estructuras civiles.

En el presente capítulo se propone una alternativa para el objetivo planteado en el párrafo anterior, *bajo la perspectiva de una cantidad limitada de información proveniente de una instrumentación parcial, que no cubre en su totalidad los puntos de registro necesarios para tener una descripción detallada del comportamiento del inmueble, pero que por otro lado, es suficiente para identificar las características básicas del inmueble en estudio.*

El desarrollo de esta propuesta podría caer dentro de las metodologías sobre reducción de modelos, sin embargo, el motivo de presentarla en este estudio no es el de adentrarse en el tema, sino el de proveer de un medio que permita llegar a criterios de detección de fallas en inmuebles parcialmente instrumentados.

7.2. Planteamiento Teórico

Una vez calculados los parámetros modales es posible obtener una matriz de rigidez equivalente normalizada respecto de las masas. Esto se logra partiendo de la ecuación (3.24), repetida por conveniencia en la ecuación (7.1), ya que al conocer cada una de las ω_i , recordando que las ω_i son las frecuencias naturales de la estructura, se puede obtener la matriz $M_m^{-1}K_m$, la cual está definida por (7.2).

$$\Omega^2 = M_m^{-1}K_m, \quad (7.1)$$

$$M_m^{-1}K_m = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_{m1}}{m_{m1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{k_{m2}}{m_{m2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{k_{mn}}{m_{mn}} \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

Recuerde que M_m y K_m denotan a las matrices de masa modal y rigidez modal respectivamente (ver ecuación (7.5)).

Ahora bien, de la matriz C_m obtenida a partir de (3.45), ecuación que por conveniencia también se repite en (7.3), se obtienen las formas modales que constituirán a la matriz Φ , la cual, según la ecuación (3.14) (ver ecuación (7.5)), se puede emplear para pasar del sistema de coordenadas modales q , a un sistema de coordenadas x , en donde cada x_i se encontrará ubicado en los niveles en los que se cuente con sensores que permitan registrar el movimiento del edificio.

$$\bar{C}_{mi} = C_{mi}\mathcal{T}^{-1}, \quad (7.3)$$

donde:

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-\xi_i\omega_i + j\omega_i}{2} & \frac{-\xi_i\omega_i - j\omega_i}{2} \end{bmatrix}. \quad (7.4)$$

$$M_m \equiv \Phi^T M \Phi, \quad \Xi_m \equiv \Phi^T \Xi \Phi, \quad K_m \equiv \Phi^T K \Phi, \quad (7.5)$$

donde $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_n]$ es la matriz compuesta por las formas modales ϕ_i .

La transformación de coordenadas se realiza mediante la aplicación de la ecuación (7.6).

$$K_{equivalente} \equiv \Phi^{T^{-1}} K_m \Phi^{-1}. \quad (7.6)$$

□

Nota 7.1 *Es muy importante aclarar que la identificación no permite obtener a las rigideces y masas modales por separado, ya que como se aprecia en (7.2), lo que se obtiene directamente son los cocientes de las rigideces modales entre las masas modales. Por lo anterior, la matriz de rigidez equivalente obtenida por (7.6) está normalizada respecto de las masas del edificio.*

Nota 7.2 *La matriz de rigidez equivalente del sistema $K_{equivalente}$, obtenida de (7.6), describe a un sistema de n grados de libertad, donde n es igual al número de pisos en el edificio real que cuentan con sensores de medición. Este sistema equivalente preserva las propiedades frecuenciales del edificio real, pero con un número bastante reducido de grados de libertad. Sin olvidar que cada uno de los componentes de la matriz $K_{equivalente}$ está normalizado respecto de las masas, es posible considerarlos como representaciones numéricas de las rigideces proporcionadas por los elementos verticales resistentes de un bloque de niveles del edificio real, concentradas en una rigidez equivalente de dicho bloque. Cada uno de los bloques de niveles a los que se hace referencia se define por la vecindad con los niveles del inmueble que cuentan con sensores de medición. En otras palabras, se reduce el modelo del edificio real a un modelo de n grados de libertad, cuyas rigideces de entrepiso son representativas de las rigideces acumuladas de entrepiso de bloques de niveles en el modelo original.*

Por otro lado, las dimensiones de la matriz $K_{equivalente}$ dependerán del número de niveles que se encuentren instrumentados, ya que las formas modales obtenidas mediante C_m , sólo cuentan con tantos valores como puntos de medición se hayan tenido para llevar a cabo la identificación.

Una vez establecido el procedimiento para la obtención de la matriz de rigidez equivalente $K_{equivalente}$, se puede generar algún criterio de detección de fallas que, mediante ella, permita observar la variación de las propiedades de la estructura después de un sismo intenso.

Ahora bien, recordando que un sistema puede ser considerado como un procesador de información (filtro), el cual recibe información de las señales de entrada para posteriormente dar otro tipo de información en las señales de salida, es evidente que dicho filtro (sistema) está constituido de un conjunto de entidades computacionales que participan en la transformación de cada una de las señales que se reciben. Un edificio es un sistema (filtro) en cuyo modelo matemático participan objetos tales como las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, cada una de las cuales operan sobre las diferentes entradas que concurren al sistema, a saber: aceleaciones, velocidades y desplazamientos respectivamente. En nuestro caso, la matriz $K_{equivalente}$ forma parte del sistema en estudio y a través de ella pueden analizarse ciertos aspectos importantes de la funcionalidad del sistema. En consecuencia, es de interés

cuantificarla mediante un escalar que simplifique las comparaciones, y que por otro lado, pueda aportar un sentido físico de su participación dentro del sistema. Una forma de medir la magnitud de la transformación que aporta la matriz equivalente cuando opera sobre la señal de entrada que le corresponde, es mediante una norma, y una de las normas más utilizadas es la norma cuadrática, la cual representa una medida de la cantidad de energía que aporta el objeto. Por lo anterior, en el desarrollo que se presenta a continuación se tomará a la norma cuadrática de la matriz de rigidez equivalente $K_{equivalente}$ como parámetro de comparación.

7.3. Conclusiones

Se ha planteado un procedimiento simple para la obtención de matrices equivalentes de sistemas representativos de inmuebles parcialmente instrumentados. A partir de parámetros como el presentado en este capítulo será posible establecer criterios de comparación y/o evaluación para la detección de fallas en dichos inmuebles.

Capítulo 8

Identificación de Fallas con Instrumentación Parcial

8.1. Introducción

Una vez que se han estudiado diferentes metodologías para la identificación de sistemas mecánicos como las estructuras civiles, y que se ha desarrollado una propuesta para la obtención de matrices de rigidez equivalentes que proveen de un criterio de comparación, se plantea la tarea de la identificación de fallas en estructuras civiles parcialmente instrumentadas.

Para ello se llevará a cabo la identificación, mediante el uso del algoritmo de identificación subespacial, del edificio instrumentado de 24 niveles que se ha venido estudiando. Para este estudio se utilizarán los registros acelerográficos de los cinco sismos de mayor intensidad que han sido captados por la instrumentación con que cuenta el inmueble. Asimismo, se desarrollará y utilizará un modelo de elementos finitos que permita reproducir el comportamiento de la estructura real, para que, mediante la excitación del mismo con los registros acelerográficos referidos, se reproduzca el comportamiento del inmueble ante escenarios de degradación de rigidez y resistencia provocados por patrones de falla progresiva.

Las herramientas analizadas a lo largo de los capítulos precedentes se emplearán en lo que sigue para alcanzar el objetivo planteado en este capítulo final de la investigación.

8.2. Identificación a Partir de Registros Acelerográficos

En esta sección se presenta la identificación del sistema utilizando el grupo de datos que, como ya se mencionó anteriormente, consiste en los registros acelerográficos de los cinco sismos de mayor intensidad que han sido captados por la instrumentación parcial instalada en el inmueble.

Los sismos que dan origen a los registros utilizados, tuvieron las características que se resumen en el cuadro 8.1.

Fecha	Magnitud Escala de Richter	Duración [seg]	Aceleración Espectral Máxima [cm/seg ²]	Epicentro
13/01/2001	7.6	198	2.23	El Salvador
16/01/2002	6.3	154	0.85	Chiapas
30/01/2002	5.5	94	0.21	Tuxtepec
18/04/2002	6.3	205	1.60	Acapulco
21/01/2003	7.8	393	7.75	Colima

Cuadro 8.1: Características de los sismos registrados.

De acuerdo con el procedimiento descrito en las secciones anteriores, se identificaron los parámetros modales del sistema para cada uno de los registros acelerográficos utilizados. En los cuadros 8.2 a 8.6 se muestran los resultados obtenidos para las direcciones transversal (T) y longitudinal (L). Los resultados mostrados son el período, el factor de amortiguamiento modal (ξ) y la forma modal, todos ellos para cada modo y en ambas direcciones.

Con base en los parámetros modales identificados, se calcularon las matrices de rigidez equivalente del sistema, en ambas direcciones, para cada sismo registrado. Posteriormente, se obtuvo la norma cuadrática para cada una de dichas matrices. En el cuadro 8.7 se muestran los valores de las normas cuadráticas obtenidas para cada caso.

Dirección T			
Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	2.96	0.032	$\{ 1.00 \ 3.31 \ 5.95 \}^T$
2	1.06	0.031	$\{ 1.00 \ 1.02 \ -0.74 \}^T$
3	0.69	0.024	$\{ 1.00 \ -0.79 \ 0.27 \}^T$
Dirección L			
Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	2.58	0.026	$\{ 1.00 \ 2.75 \ 5.21 \}^T$
2	2.25	0.224	$\{ 1.00 \ 2.51 \ -1.52 \}^T$
3	0.82	0.024	$\{ 1.00 \ -0.39 \ 0.01 \}^T$

Cuadro 8.2: Parámetros modales identificados utilizando el registro del sismo del 13 de enero de 2001.

Dirección T			
Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	2.79	0.043	$\{ 1.00 \ 3.11 \ 5.62 \}^T$
2	1.03	0.026	$\{ 1.00 \ 1.07 \ -0.77 \}^T$
3	0.64	0.059	$\{ 1.00 \ -0.76 \ 0.24 \}^T$
Dirección L			
Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	2.49	0.032	$\{ 1.00 \ 2.88 \ 5.38 \}^T$
2	0.80	0.028	$\{ 1.00 \ 1.18 \ -0.82 \}^T$
3	0.46	0.017	$\{ 1.00 \ -0.71 \ 0.19 \}^T$

Cuadro 8.3: Parámetros modales identificados utilizando el registro del sismo del 16 de enero de 2002.

Dirección T			
Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	2.89	0.046	$\{ 1.00 \ 3.28 \ 5.77 \}^T$
2	1.02	0.025	$\{ 1.00 \ 0.99 \ -0.74 \}^T$
3	0.61	0.067	$\{ 1.00 \ -0.80 \ 0.28 \}^T$
Dirección L			
Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	2.44	0.030	$\{ 1.00 \ 2.80 \ 5.13 \}^T$
2	0.80	0.025	$\{ 1.00 \ 1.13 \ -0.81 \}^T$
3	0.45	0.015	$\{ 1.00 \ -0.74 \ 0.21 \}^T$

Cuadro 8.4: Parámetros modales identificados utilizando el registro del sismo del 30 de enero de 2002.

Dirección T			
Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	2.91	0.046	$\{ 1.00 \ 3.23 \ 5.78 \}^T$
2	1.05	0.033	$\{ 1.00 \ 0.87 \ -0.66 \}^T$
3	0.63	0.061	$\{ 1.00 \ -0.90 \ 0.33 \}^T$
Dirección L			
Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	2.57	0.025	$\{ 1.00 \ 2.81 \ 5.14 \}^T$
2	0.82	0.028	$\{ 1.00 \ 1.16 \ -0.83 \}^T$
3	0.46	0.016	$\{ 1.00 \ -0.72 \ 0.20 \}^T$

Cuadro 8.5: Parámetros modales identificados utilizando el registro del sismo del 18 de abril de 2002.

Dirección T			
Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	3.03	0.056	$\{ 1.00 \ 3.24 \ 5.96 \}^T$
2	1.10	0.045	$\{ 1.00 \ 1.03 \ -0.73 \}^T$
3	0.67	0.084	$\{ 1.00 \ -0.79 \ 0.26 \}^T$
Dirección L			
Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	2.66	0.046	$\{ 1.00 \ 2.84 \ 5.14 \}^T$
2	0.85	0.036	$\{ 1.00 \ 1.21 \ -0.86 \}^T$
3	0.47	0.028	$\{ 1.00 \ -0.69 \ 0.19 \}^T$

Cuadro 8.6: Parámetros modales identificados utilizando el registro del sismo del 21 de enero de 2003.

Sismo \ Dirección	Transversal	Longitudinal
13/01/2001	49.31	50.81
16/01/2002	59.71	119.07
30/01/2002	60.96	121.82
18/04/2002	51.52	118.71
21/01/2003	52.12	115.58

Cuadro 8.7: Normas cuadráticas de las matrices de rigidez equivalentes calculadas para cada sismo.

8.3. Identificación a Partir de Simulaciones Generadas de los Registros Acelerográficos

En esta sección se presenta la identificación de los parámetros modales y de la matriz de rigidez equivalente del modelo de elementos finitos del edificio instrumentado. Este modelo consta de 830 nodos con seis grados de libertad cada uno, 1872 elementos barra tridimensionales y 696 elementos placa bidimensionales. El modelo fue previamente calibrado utilizando mediciones de vibración ambiental para lograr que reprodujera lo mejor posible el comportamiento del edificio real. La finalidad de identificar las propiedades del modelo de elementos finitos, es la de validar su uso para modelar condiciones de falla que se pudieran presentar en el edificio real, con el fin de evaluar el uso de la norma cuadrática de la matriz de rigidez equivalente obtenida con el procedimiento propuesto, como un posible indicador para la detección de fallas en el inmueble.

Para poder realizar la identificación del sistema se obtuvieron las historias de aceleración en los mismos puntos en los que se tienen colocados los sensores en el edificio real. Estas historias de aceleración se obtienen a partir del análisis dinámico paso a paso del modelo, considerando como condición de carga, a una excitación en la base del edificio igual a la aceleración del terreno medida en cada uno de los eventos sísmicos considerados (ver Cuadro 8.1). De esta forma, se trata de obtener registros de aceleración simulados, a través del modelo de elementos finitos, bajo las mismas condiciones de carga con las que se identificaron los parámetros del edificio real en la sección anterior.

Cada una de las historias de aceleración simuladas se consideraron como salidas del sistema, y a partir de ellas se identificaron los parámetros modales del modelo de elementos finitos que se muestran en los cuadros 8.8 a 8.12. Al igual que en la sección anterior, la identificación se lleva a cabo tanto en la dirección transversal como en la dirección longitudinal.

Al igual que en la sección anterior, y con base en los parámetros modales identificados del modelo de elementos finitos, se calcularon las matrices de rigidez equivalente del sistema, en ambas direcciones, para cada sismo registrado. Posteriormente, se obtuvo la norma cuadrática para cada una de dichas matrices. En el cuadro 8.13 se muestran los valores de las normas cuadráticas obtenidas para cada caso.

Dirección T			
Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	2.95	0.054	$\{ 1.00 \ 2.40 \ 3.76 \}^T$
2	1.09	0.050	$\{ 1.00 \ 0.73 \ -0.73 \}^T$
3	0.61	0.053	$\{ 1.00 \ -0.99 \ 0.36 \}^T$
Dirección L			
Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	2.47	0.067	$\{ 1.00 \ 2.59 \ 4.68 \}^T$
2	1.56	-0.097	$\{ 1.00 \ 1.76 \ -1.19 \}^T$
3	0.75	0.052	$\{ 1.00 \ -0.52 \ 0.07 \}^T$

Cuadro 8.8: Parámetros modales identificados del modelo de elementos finitos utilizando el sismo del 13 de enero de 2001.

Dirección T			
Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	2.95	0.048	$\{ 1.00 \ 2.42 \ 3.81 \}^T$
2	1.09	0.050	$\{ 1.00 \ 0.72 \ -0.72 \}^T$
3	0.60	0.060	$\{ 1.00 \ -1.01 \ 0.38 \}^T$
Dirección L			
Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	2.43	0.061	$\{ 1.00 \ 2.57 \ 4.64 \}^T$
2	0.75	0.051	$\{ 1.00 \ 0.99 \ -0.76 \}^T$
3	0.41	0.000	$\{ 1.00 \ -0.83 \ 0.24 \}^T$

Cuadro 8.9: Parámetros modales identificados del modelo de elementos finitos utilizando el sismo del 16 de enero de 2002.

Dirección T			
Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	2.86	0.072	$\{ 1.00 \ 2.52 \ 3.82 \}^T$
2	1.09	0.052	$\{ 1.00 \ 0.75 \ -0.75 \}^T$
3	0.59	0.060	$\{ 1.00 \ -0.96 \ 0.37 \}^T$
Dirección L			
Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	2.46	0.070	$\{ 1.00 \ 2.57 \ 4.62 \}^T$
2	0.75	0.052	$\{ 1.00 \ 0.99 \ -0.77 \}^T$
3	0.38	0.024	$\{ 1.00 \ -0.82 \ 0.24 \}^T$

Cuadro 8.10: Parámetros modales identificados del modelo de elementos finitos utilizando el sismo del 30 de enero de 2002.

Dirección T			
Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	2.95	0.051	$\{ 1.00 \ 2.42 \ 3.80 \}^T$
2	1.09	0.050	$\{ 1.00 \ 0.75 \ -0.74 \}^T$
3	0.60	0.059	$\{ 1.00 \ -0.97 \ 0.36 \}^T$
Dirección L			
Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	2.47	0.068	$\{ 1.00 \ 2.56 \ 4.59 \}^T$
2	0.75	0.051	$\{ 1.00 \ 0.98 \ -0.77 \}^T$
3	0.39	0.028	$\{ 1.00 \ -0.83 \ 0.24 \}^T$

Cuadro 8.11: Parámetros modales identificados del modelo de elementos finitos utilizando el sismo del 18 de abril de 2002.

Dirección T			
Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	2.95	0.053	$\{ 1.00 \ 2.39 \ 3.76 \}^T$
2	1.09	0.050	$\{ 1.00 \ 0.74 \ -0.74 \}^T$
3	0.60	0.058	$\{ 1.00 \ -0.99 \ 0.36 \}^T$
Dirección L			
Modo	Período [seg]	ξ	Forma Modal
1	2.43	0.073	$\{ 1.00 \ 2.60 \ 4.76 \}^T$
2	0.75	0.051	$\{ 1.00 \ 1.00 \ -0.76 \}^T$
3	0.41	0.022	$\{ 1.00 \ -0.82 \ 0.24 \}^T$

Cuadro 8.12: Parámetros modales identificados del modelo de elementos finitos utilizando el sismo del 21 de enero de 2003.

Sismo \ Dirección	Transversal	Longitudinal
13/01/2001	49.84	55.16
16/01/2002	50.07	134.77
30/01/2002	54.22	155.01
18/04/2002	53.01	145.90
21/01/2003	51.66	138.01

Cuadro 8.13: Normas cuadráticas de las matrices de rigidez equivalentes del modelo de elementos finitos calculadas para cada sismo.

8.4. Identificación a Partir de Simulaciones en las que se Generan Condiciones de Falla Progresiva

Una vez validado el modelo de elementos finitos con los resultados de la sección anterior, es posible utilizarlo para tratar de identificar al sistema bajo algunas condiciones de falla.

Nota 8.1 *La bondad de hacer esto estriba en la capacidad que se tiene de probar el procedimiento utilizado para detectar e identificar fallas en el inmueble, sin tener que esperar a que éstas se presenten en la estructura real.*

Para poder llevar a cabo la identificación del inmueble, bajo estas condiciones, es necesario definir los escenarios que se supondrán en el deterioro del mismo, es decir, se requiere establecer las condiciones de falla para las cuales se obtendrán los parámetros del sistema. Este primer paso no cuenta con una solución obvia para un inmueble de las características del que se encuentra en estudio; con todo rigor, hay un número muy grande de formas en la que el edificio puede presentar deterioro en la rigidez y resistencia de sus elementos estructurales, más grande aún que el mismo número de sus elementos, ya que las combinaciones para el desarrollo de los posibles mecanismos de falla son prácticamente infinitas, además, es posible que cada sismo en particular active diferentes mecanismos de acuerdo con sus propias características, con lo que el panorama se complica.

No obstante lo anterior, es posible establecer procedimientos con criterios ingenieriles que permitan acotar las posibilidades en cuanto a las combinaciones de los mecanismos de falla. Esto se hace a diario, en los despachos de cálculo estructural, cuando se utilizan procedimientos de análisis que emplean las envolventes probabilísticas de los sismos que pueden ocurrir en un lugar determinado, tales envolventes son conocidas como *espectros de diseño* y resultan ser la única herramienta práctica con que cuentan los ingenieros para hacer diseños basados en análisis dinámicos de los inmuebles. El inconveniente que presentaría el utilizar este procedimiento de análisis en este estudio, es el hecho de que los resultados que se obtienen del mismo, son envolventes a su vez de los elementos mecánicos y de las respuestas de la estructura ante las excitaciones a las que se somete. De hecho, *la única forma de obtener historias de la respuesta del inmueble útiles para realizar la identificación del sistema, es mediante un análisis paso a paso.* En este tipo de análisis se requiere de señales de entrada que exciten al modelo, para que, del análisis del inmueble se obtengan las historias de respuesta del mismo, así como los valores máximo y mínimo de cada uno de sus elementos mecánicos.

Es por ello que para llevar a cabo esta parte del trabajo, se optó por utilizar al registro del sismo del 21 de enero de 2003 como señal de entrada en el modelo de elementos finitos, y así obtener historias de aceleración que permitan llevar a cabo la identificación del sistema. La razón de haber seleccionado este registro entre los otros es debido a que tiene la duración más larga, y de esta forma es susceptible de ser escalado por etapas. El escalamiento del registro es necesario debido a que su intensidad no es suficiente para producir daño en el inmueble tal y como se requiere.

Otro punto que hay que definir es la localización del daño entre los diferentes elementos estructurales del inmueble. Esto no representa un problema menor, ya que la evaluación de la aparición de una eventual falla en cada elemento, requiere no sólo del conocimiento de la demanda de resistencia a la que se ve expuesto, sino de su propia capacidad resistente. Ahora bien, si lo que se busca es la aparición del *mecanismo de falla* que generará la excitación en consideración, sería necesario evaluar para cada intervalo de tiempo, y en todos los elementos estructurales a la vez, si las demandas de resistencia no han sobrepasado a las resistencias mismas, lo que implica un trabajo sumamente laborioso por parte del analizador. Por todo lo anterior, es conveniente delimitar los puntos sobre los cuales se buscará fundamentar al *mecanismo de falla* que permita observar la degradación de la rigidez y resistencia del inmueble. Para ello se establece que se considerarán únicamente a las columnas del inmueble que son parte constitutiva de la torre, dejando a un lado para efectos de este análisis, la posibilidad de aparición de fallas en todas las trabes del inmueble, así como en los muros de concreto, y columnas que no se encuentren en lo que se define como torre del mismo, es decir, no se considerará la posibilidad de falla sobre las columnas que constituyen a la estructura del estacionamiento.

Ahora bien, se considerará que una columna presenta falla si se cumple con alguna de las dos condiciones siguientes:

- Su capacidad para resistir flexocompresión biaxial se ve excedida.
- Su capacidad para resistir fuerzas cortantes se ve excedida.

Con base en lo anterior, se estableció un procedimiento para evaluar la capacidad de todas y cada una de las columnas, que constituyen la torre, bajo flexocompresión biaxial y fuerza cortante. Esta resistencia se compara con la demanda impuesta por la excitación, y en caso de ser excedida por esta última se considera que se presenta una falla en la columna.

Con el fin de aclarar el procedimiento utilizado, se enumeran a continuación los pasos que se siguieron para llevar a cabo la identificación bajo estas condiciones.

1. Definir diferentes etapas o secciones en las que se pueda dividir al registro sísmico con el fin de generar daño progresivo en la estructura. Un criterio

sencillo para esta actividad es el definir dichas etapas en términos de los picos de mayor intensidad que presentan las señales.

2. Escalar a la primera etapa o sección del registro, para utilizarla como entrada en el modelo de elementos finitos buscando generar las primeras fallas en las columnas consideradas.
3. Una vez escalada la primera etapa, aplicar el mismo factor de escalamiento con cada una de las etapas subsiguientes con el fin de ir generando la aparición de fallas adicionales en las columnas en estudio.
4. Para cada etapa de aparición de fallas se lleva a cabo la identificación de los parámetros modales del inmueble, así como de las matrices de rigidez equivalentes y de sus normas cuadráticas respectivas, utilizando el procedimiento descrito en este trabajo.

La evaluación, de la aparición de fallas en las columnas en estudio, sigue a su vez una serie de pasos que se definen a continuación.

1. Se toma la etapa correspondiente del registro escalada y se le suministra como excitación al modelo de elementos finitos.
2. Se lleva a cabo el análisis paso a paso del modelo.
3. Se obtienen los elementos mecánicos generados por la excitación en cada una de las columnas en estudio.
4. Se procesa la información del punto anterior utilizando un programa de computadora desarrollado por el que suscribe este informe, en el que se evalúa si la capacidad de la columna ha sido sobrepasada. Esta evaluación considera a las dos condiciones de falla descritas anteriormente.
5. En caso de que no se hubiese logrado generar fallas (adicionales) en las columnas, se procede a escalar nuevamente a la etapa del registro en cuestión y se repite el proceso a partir del punto 1. Si por el contrario, aparecen fallas (adicionales) en las columnas, se lleva a cabo la identificación de los parámetros del sistema *y se colocan articulaciones en los puntos de las columnas en los que se ha excedido su capacidad.*
6. Antes de proceder a utilizar una nueva etapa o sección del registro, se vuelve a analizar al modelo, pero ahora con las articulaciones colocadas a partir del punto 5. Esto tiene como finalidad el observar la redistribución de la carga

en las columnas restantes, la cual puede llevar a que otras columnas que no habían presentado falla, la presenten una vez que las otras ya la presentaron; de ser este el caso se vuelve a realizar la identificación del sistema y a colocar las (nuevas) articulaciones en los puntos de las columnas en las que se ha excedido su capacidad.

7. Se repite el punto 6 hasta que ya no se generen más fallas debido a la redistribución de la carga.
8. Una vez que se cumple con lo establecido en el punto 7, se procede a tomar la siguiente etapa o sección del registro, aplicándole el mismo factor de escalamiento de la etapa anterior y se repite el proceso a partir del punto 1.
9. El proceso termina cuando se ha logrado generar un mecanismo de falla que acerque al inmueble a la inestabilidad. Un criterio para decidir esto puede ser el uso de los parámetros que se han ido identificando en cada etapa de acumulación del daño.

Nota 8.2 *Como es de suponerse, cada uno de los puntos anteriores implica una continua intervención del analista. Por otro lado, la descripción que se ha hecho ha sido de forma general, y será necesario describir con mayor detalle algunos de los pasos del proceso, en especial el paso 4, el cual será motivo de un informe complementario.*

A partir de la aplicación del procedimiento descrito, es posible considerar seis diferentes etapas de falla progresiva. En cada una de ellas se utiliza a su vez el procedimiento propuesto para identificación de los parámetros modales y matrices de rigidez equivalentes en el inmueble.

Para apreciar mejor la utilidad de los resultados conviene analizar brevemente el significado de la simplificación que se está utilizando. El hecho de contar con una instrumentación parcial, es decir, el contar con sensores sólo en algunos niveles y no en todos, limita los resultados que se pueden obtener. De acuerdo a lo mostrado anteriormente, al llevar a cabo la identificación de los parámetros modales, es posible obtener las formas modales del sistema, con valores bien definidos de los desplazamientos modales, sólo en aquellos niveles en donde se ubican los sensores. A partir de este resultado se concluye que, la matriz de rigidez equivalente obtenida posteriormente, es una matriz que se forma a partir de las rigideces de tres grandes bloques de entrepisos, es decir, los valores contenidos en ella son representativos de un modelo de tres grados de libertad que es equivalente al modelo del inmueble, en tanto que conserva el contenido de frecuencias del edificio real. Este nuevo sistema equivalente reducido, no permite establecer con precisión parámetros físicos tales

como desplazamientos de entrepiso o distorsiones de estrepiso a los que está acostumbrado todo ingeniero civil, pero por otro lado, permite detectar a través de sus valores y estructura, cambios experimentados por el sistema en algún grupo de elementos estructurales que sustentan al inmueble.

Al aplicar los procedimientos propuestos, se buscará establecer si la norma cuadrática de la matriz de rigidez equivalente es una medida confiable que permita detectar la ocurrencia de una falla en el inmueble, mientras que se valorará la posibilidad de localizar dicha falla mediante la estructura de la matriz de rigidez equivalente calculada.

En los cuadros 8.14, 8.15 y 8.16 se muestra una comparación de los parámetros modales identificados, para los tres modos, bajo las diferentes condiciones de falla.

Ahora bien, en el cuadro 8.17 se puede observar la comparación de las normas cuadráticas de las matrices de rigidez equivalente calculadas para cada condición de falla.

8.5. Conclusiones

En primera instancia se pueden comentar los resultados respecto a las normas cuadráticas, de las matrices de rigidez equivalentes, obtenidas al utilizar los registros acelerográficos captados por la instrumentación parcial del inmueble. Como se puede observar en el cuadro 8.7 hay una consistencia en los valores de las normas cuadráticas calculadas, excepto en aquellas correspondientes al sismo del 13 de enero de 2001. Es de considerarse el hecho de que este sismo es el que tuvo el epicentro más alejado a la Ciudad de México, por lo que la señal fue filtrada a través de la distancia que tuvo que recorrer antes de llegar al edificio; vale la pena detenerse un momento en analizar el efecto que esto puede tener en la excitación al edificio. De acuerdo con los conocimientos que se tienen en el campo de la propagación de ondas sísmicas [25], es bien sabido que los sismos de mayor magnitud producen movimientos de mayor duración y períodos grandes en comparación con los movimientos producidos de menor magnitud; en consecuencia, el contenido de frecuencias en el movimiento del terreno está íntimamente relacionado con la magnitud del sismo. Por otro lado, en la medida en que las ondas sísmicas viajan a través del terreno, las componentes del movimiento de frecuencias altas se van disipando y son absorbidas por el terreno de forma más rápida que las componentes de baja frecuencia. Como consecuencia, el contenido de frecuencias del movimiento del terreno cambia con la distancia y su intensidad disminuye. Un aspecto importante del cambio en el contenido de frecuencias con la distancia es el que involucra el desplazamiento de la amplitud del espectro de Fourier hacia las frecuencias bajas, o hacia períodos altos. Como resultado, el período fundamental del movimiento del terreno se incrementa

Dirección T			
Condición	Período [seg]	ξ	Forma Modal
Original	2.95	0.053	$\{ 1.00 \ 2.39 \ 3.76 \}^T$
Falla 1	2.98	0.052	$\{ 1.00 \ 2.42 \ 3.84 \}^T$
Falla 2	2.92	0.057	$\{ 1.00 \ 2.38 \ 3.75 \}^T$
Falla 3	2.95	0.058	$\{ 1.00 \ 2.32 \ 3.64 \}^T$
Falla 4	2.95	0.058	$\{ 1.00 \ 2.32 \ 3.64 \}^T$
Falla 5	3.39	0.104	$\{ 1.00 \ 2.64 \ 4.19 \}^T$
Falla 6	3.54	0.083	$\{ 1.00 \ 2.46 \ 3.77 \}^T$
Dirección L			
Condición	Período [seg]	ξ	Forma Modal
Original	2.43	0.073	$\{ 1.00 \ 2.60 \ 4.76 \}^T$
Falla 1	2.44	0.072	$\{ 1.00 \ 2.56 \ 4.65 \}^T$
Falla 2	2.46	0.058	$\{ 1.00 \ 2.58 \ 4.65 \}^T$
Falla 3	2.47	0.058	$\{ 1.00 \ 2.57 \ 4.53 \}^T$
Falla 4	2.46	0.058	$\{ 1.00 \ 2.56 \ 4.51 \}^T$
Falla 5	2.58	0.042	$\{ 1.00 \ 2.57 \ 4.56 \}^T$
Falla 6	2.72	0.046	$\{ 1.00 \ 2.53 \ 4.49 \}^T$

Cuadro 8.14: Parámetros para el modo 1 identificados del modelo de elementos finitos utilizando el sismo del 21 de enero de 2003.

Dirección T			
Condición	Período [seg]	ξ	Forma Modal
Original	1.09	0.050	$\{ 1.00 \ 0.74 \ -0.74 \}^T$
Falla 1	1.09	0.050	$\{ 1.00 \ 0.73 \ -0.72 \}^T$
Falla 2	1.10	0.052	$\{ 1.00 \ 0.74 \ -0.73 \}^T$
Falla 3	1.11	0.051	$\{ 1.00 \ 0.71 \ -0.73 \}^T$
Falla 4	1.11	0.051	$\{ 1.00 \ 0.71 \ -0.73 \}^T$
Falla 5	1.19	0.062	$\{ 1.00 \ 0.77 \ -0.73 \}^T$
Falla 6	1.24	0.063	$\{ 1.00 \ 0.61 \ -0.66 \}^T$
Dirección L			
Condición	Período [seg]	ξ	Forma Modal
Original	0.75	0.051	$\{ 1.00 \ 1.00 \ -0.76 \}^T$
Falla 1	0.75	0.051	$\{ 1.00 \ 0.99 \ -0.76 \}^T$
Falla 2	0.75	0.049	$\{ 1.00 \ 0.99 \ -0.78 \}^T$
Falla 3	0.76	0.053	$\{ 1.00 \ 0.98 \ -0.78 \}^T$
Falla 4	0.76	0.053	$\{ 1.00 \ 0.98 \ -0.78 \}^T$
Falla 5	1.10	-0.01	$\{ 1.00 \ 0.73 \ -0.63 \}^T$
Falla 6	1.25	0.051	$\{ 1.00 \ 2.09 \ -1.40 \}^T$

Cuadro 8.15: Parámetros para el modo 2 identificados del modelo de elementos finitos utilizando el sismo del 21 de enero de 2003.

Dirección T			
Condición	Período [seg]	ξ	Forma Modal
Original	0.60	0.058	$\{ 1.00 \ -0.99 \ 0.36 \}^T$
Falla 1	0.60	0.063	$\{ 1.00 \ -1.01 \ 0.38 \}^T$
Falla 2	0.60	0.065	$\{ 1.00 \ -0.99 \ 0.36 \}^T$
Falla 3	0.60	0.070	$\{ 1.00 \ -1.02 \ 0.38 \}^T$
Falla 4	0.60	0.071	$\{ 1.00 \ -1.03 \ 0.38 \}^T$
Falla 5	0.64	0.060	$\{ 1.00 \ -0.95 \ 0.36 \}^T$
Falla 6	0.67	0.055	$\{ 1.00 \ -1.13 \ 0.47 \}^T$
Dirección L			
Condición	Período [seg]	ξ	Forma Modal
Original	0.41	0.022	$\{ 1.00 \ -0.82 \ 0.24 \}^T$
Falla 1	0.40	0.030	$\{ 1.00 \ -0.83 \ 0.24 \}^T$
Falla 2	0.42	0.020	$\{ 1.00 \ -0.82 \ 0.24 \}^T$
Falla 3	0.44	0.020	$\{ 1.00 \ -0.82 \ 0.25 \}^T$
Falla 4	0.45	0.021	$\{ 1.00 \ -0.83 \ 0.25 \}^T$
Falla 5	0.78	0.051	$\{ 1.00 \ -1.05 \ 0.37 \}^T$
Falla 6	0.81	-0.029	$\{ 1.00 \ -0.46 \ 0.03 \}^T$

Cuadro 8.16: Parámetros para el modo 3 identificados del modelo de elementos finitos utilizando el sismo del 21 de enero de 2003.

Condición \ Dirección	Transversal	%	Longitudinal	%
Original	51.66	0.00	138.01	0.00
Falla 1	50.53	-2.19	130.50	-5.44
Falla 2	50.52	-2.21	130.15	-5.70
Falla 3	49.36	-4.45	117.62	-14.77
Falla 4	49.13	-4.90	110.80	-19.72
Falla 5	47.63	-7.80	28.73	-79.18
Falla 6	35.36	-31.55	21.06	-84.74

Cuadro 8.17: Normas cuadráticas de las matrices de rigidez equivalentes del modelo de elementos finitos calculadas para cada condición de falla utilizando el sismo del 21 de enero de 2003.

cuando se incrementa la distancia epicentral.

En las figuras 8.1 a 8.10 se muestran los espectros de respuesta de cada uno de los cinco sismos utilizados en su dos componentes. Como se puede observar, en los sismos del 16 de enero de 2002, 30 de enero de 2002, 18 de abril de 2002 y 21 de enero de 2003, el período fundamental del movimiento del terreno se encuentra aproximadamente entre 1.00 y 2.00 seg. con un valor promedio de 1.50 seg., lo cual es característico del terreno de transición en la Ciudad de México; sin embargo, en el espectro de respuesta del sismo del 13 de enero de 2001, se observa que el período fundamental del movimiento del terreno se recorre hasta el intervalo de 2.50 a 3.00 seg, lo cual, de acuerdo a lo explicado anteriormente, se puede atribuir a la distancia epicentral del sismo en cuestión; y si bien esta distancia epicentral es muy grande, dada la magnitud del sismo, no fue suficiente para atenuarlo por completo, y al llegar al inmueble tuvo aún la energía suficiente para excitarlo pero con un período de excitación muy cercano al período natural de vibración del primer modo del inmueble (3.00 seg); esta cercanía entre el período de la excitación y el período fundamental del inmueble generó una respuesta típica de resonancia, que si bien por la atenuación de las ondas sísmicas no generó problemas en el inmueble, si fue capaz de excitar al inmueble de forma diferente a la manera en que fue

excitado por los otros sismos. El efecto que tuvo esta característica de la señal en la identificación y en las matrices de rigidez equivalentes, podría hacer pensar en una disminución importante en la rigidez del inmueble, sin embargo en los hechos esto no fue así, y lo que se puede observar en los resultados obtenidos es el efecto que puede provocar la resonancia en el comportamiento de un inmueble que experimenta este fenómeno; en otras palabras, *para efectos de la identificación de estructuras civiles, la presencia de resonancia en el inmueble puede llegar a tener el mismo efecto en su comportamiento que el que tendría una disminución importante en la rigidez del mismo.*

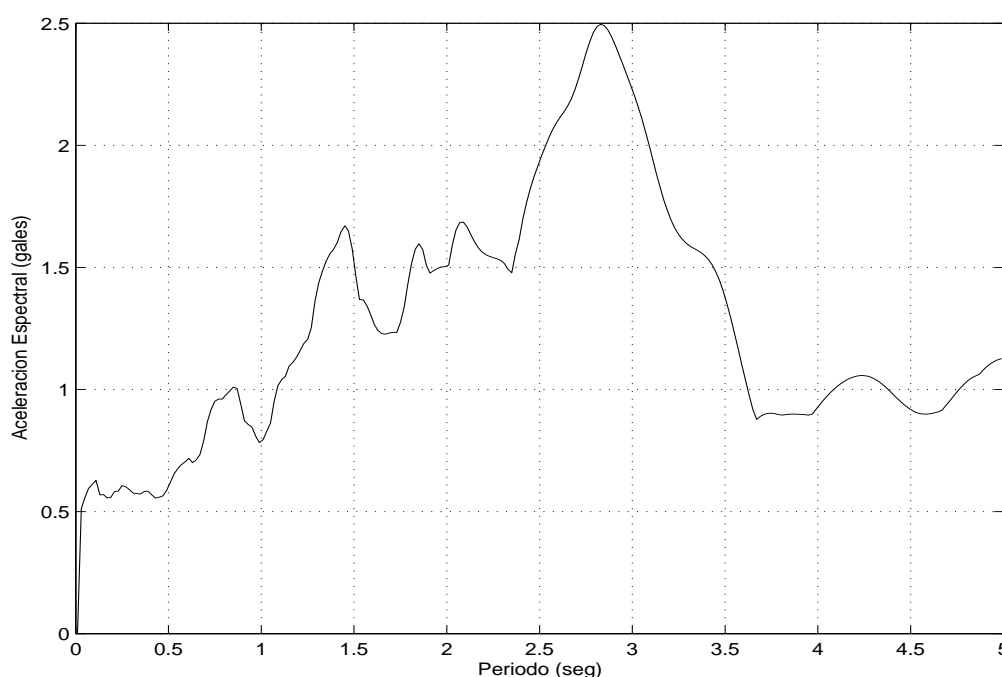


Figura 8.1: Espectro de respuesta del sismo del 13 de enero de 2001 en dirección X.

Por otro lado, cuando se utilizan las simulaciones generadas a partir de registros acelerográficos, las normas cuadráticas calculadas siguen la misma tendencia que las arriba mencionadas, es decir, la mayoría de ellas presentan valores cercanos entre sí, excepto las correspondientes al sismo del 13 de enero de 2001, y para las cuales vale el comentario hecho en el párrafo anterior. Asimismo, tomando como base la semejanza de los valores observados en los cuadros 8.7 y 8.13 se infiere que el modelo de elementos finitos puede ser útil para simular el comportamiento del edificio real.

Ahora bien, antes de proseguir con los comentarios sobre los resultados obtenidos en las simulaciones del deterioro gradual del inmueble, conviene reflexionar por un

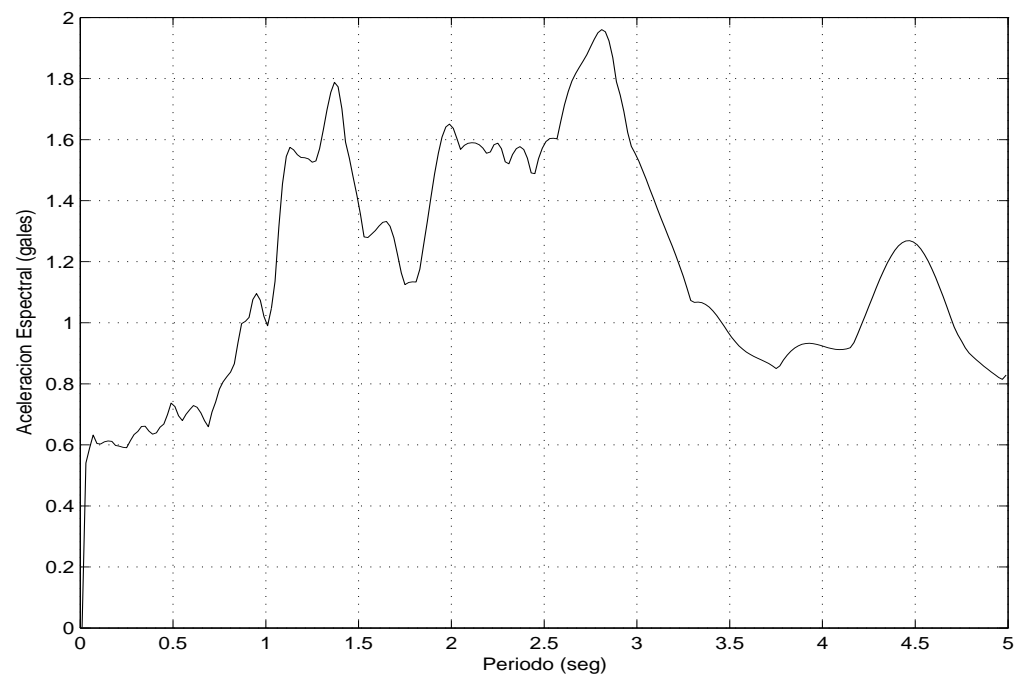


Figura 8.2: Espectro de respuesta del sismo del 13 de enero de 2001 en dirección Y.

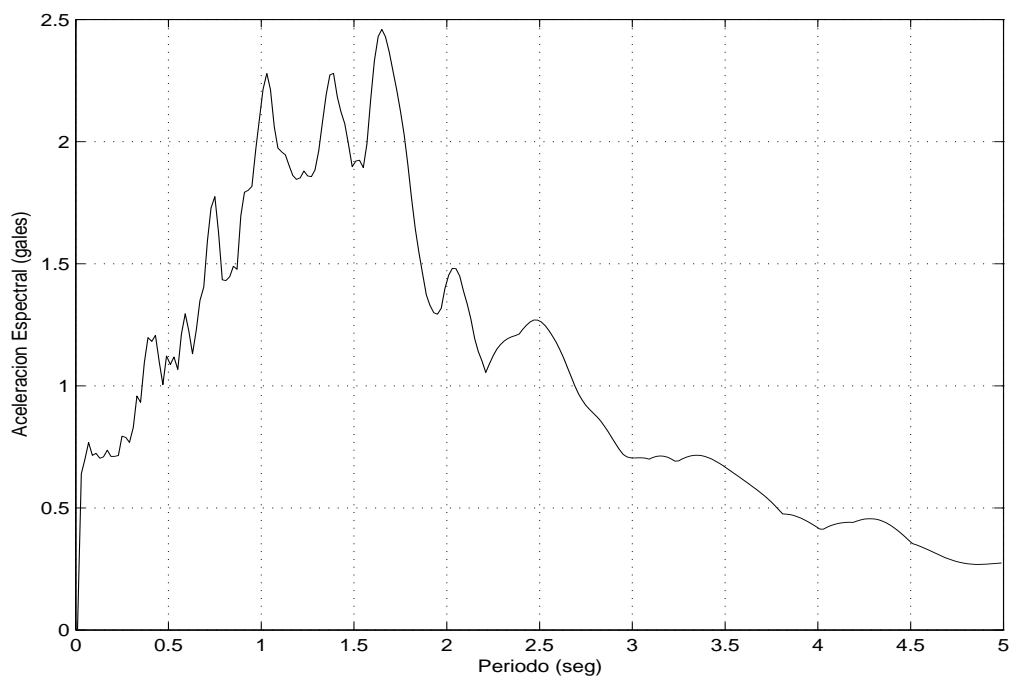


Figura 8.3: Espectro de respuesta del sismo del 16 de enero de 2002 en dirección X.

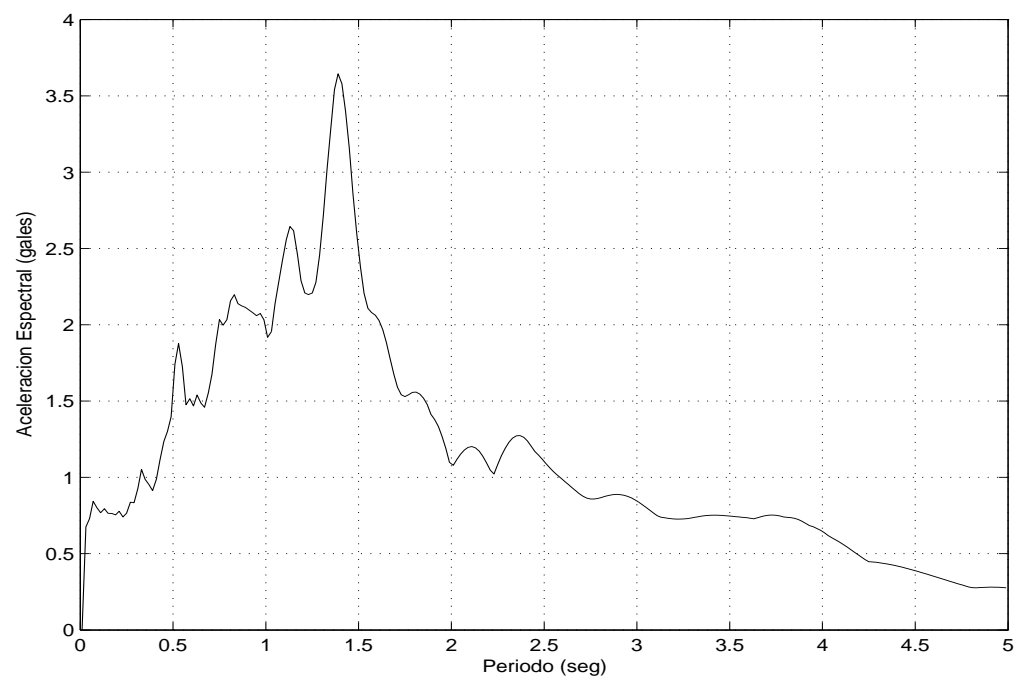


Figura 8.4: Espectro de respuesta del sismo del 16 de enero de 2002 en dirección Y.

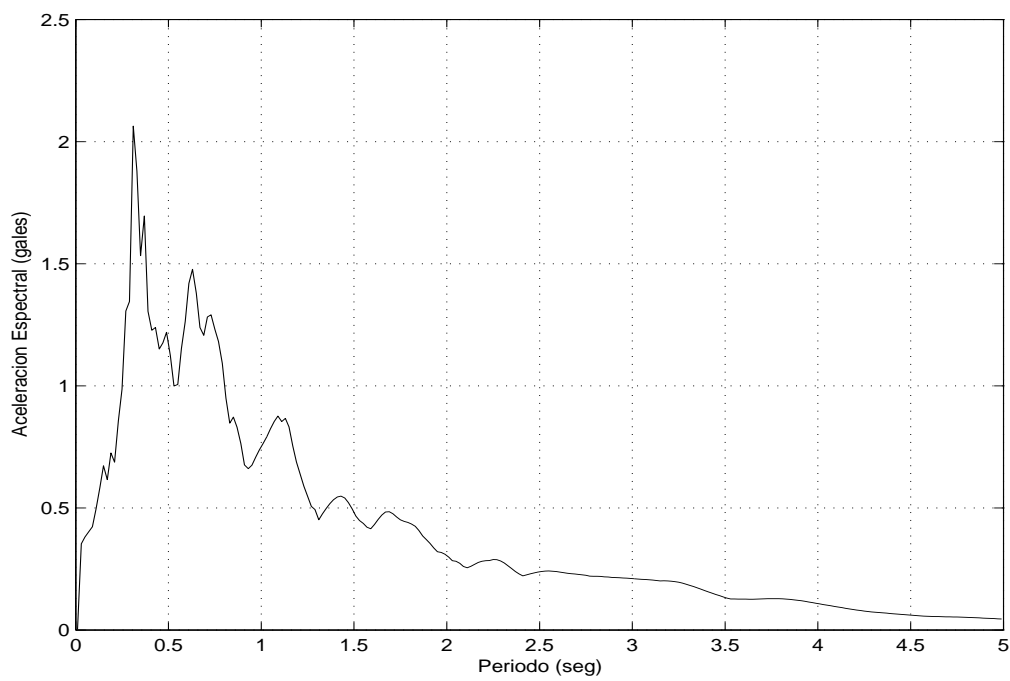


Figura 8.5: Espectro de respuesta del sismo del 30 de enero de 2002 en dirección X.

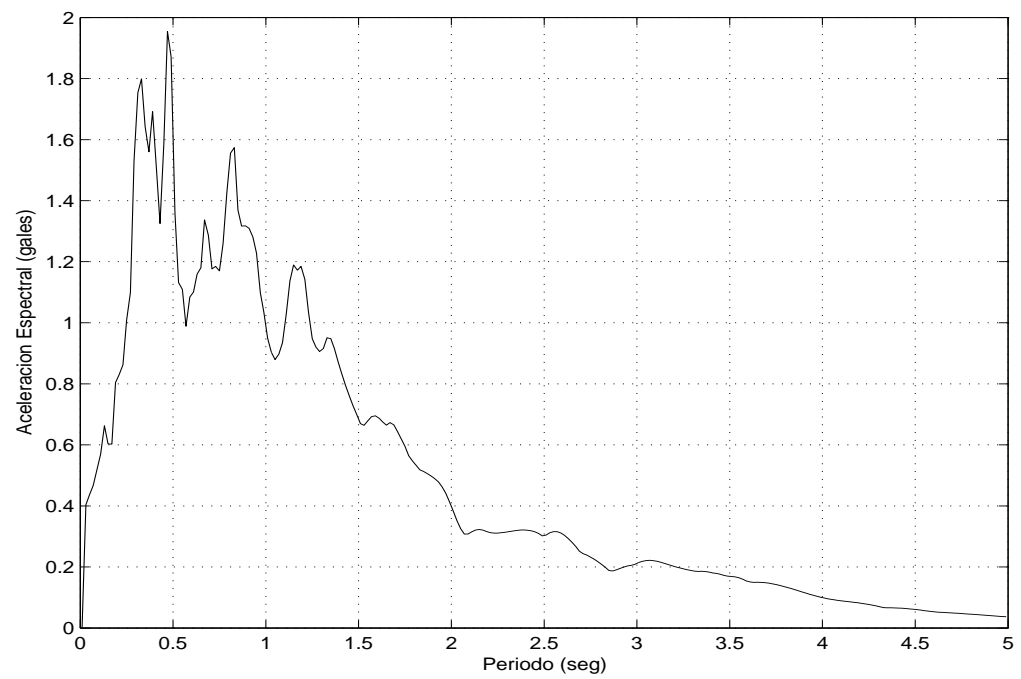


Figura 8.6: Espectro de respuesta del sismo del 30 de enero de 2002 en dirección Y.

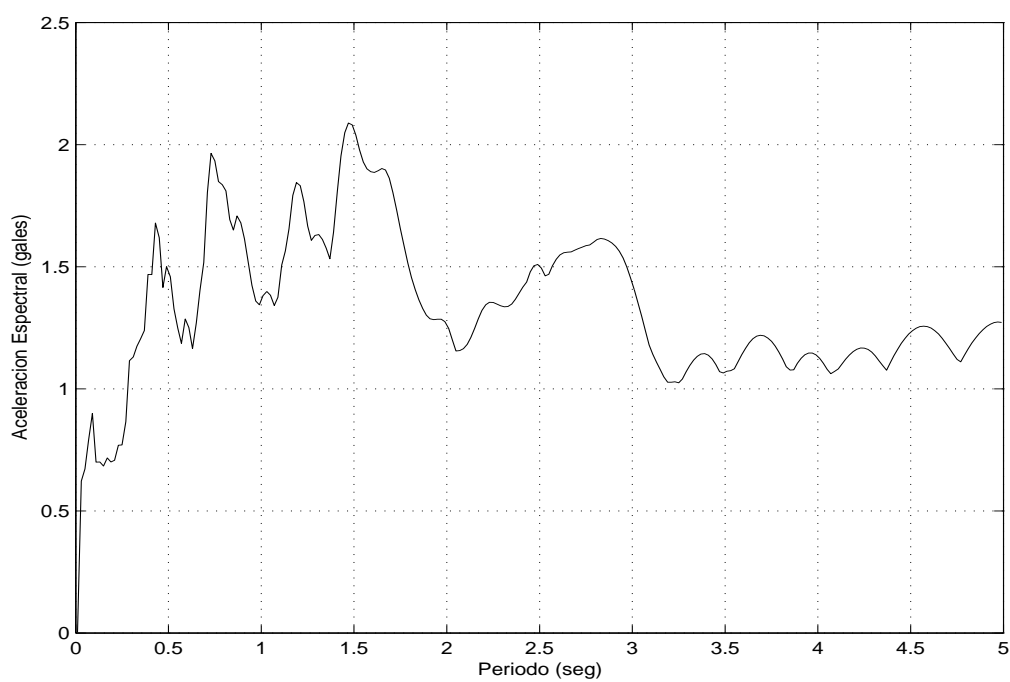


Figura 8.7: Espectro de respuesta del sismo del 18 de abril de 2002 en dirección X.

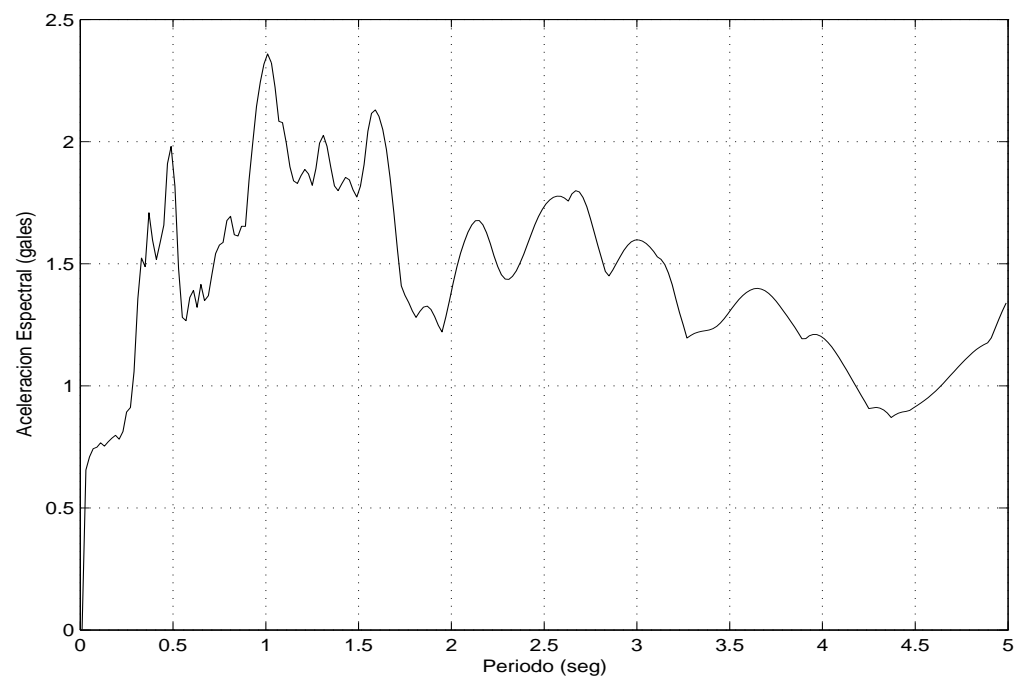


Figura 8.8: Espectro de respuesta del sismo del 18 de abril de 2002 en dirección Y.

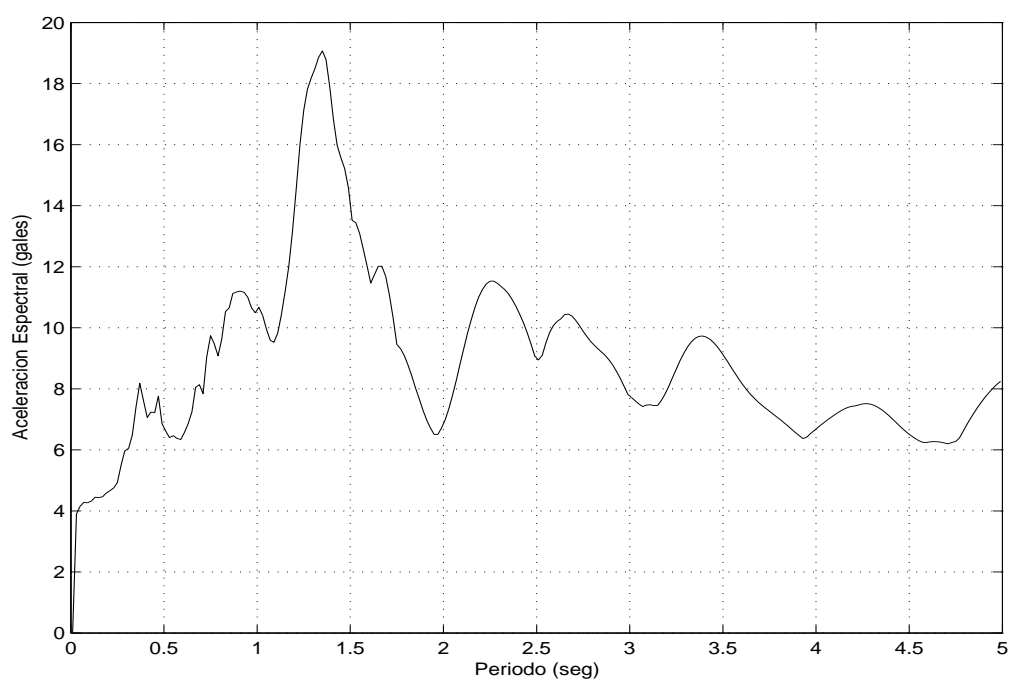


Figura 8.9: Espectro de respuesta del sismo del 21 de enero de 2003 en dirección X.

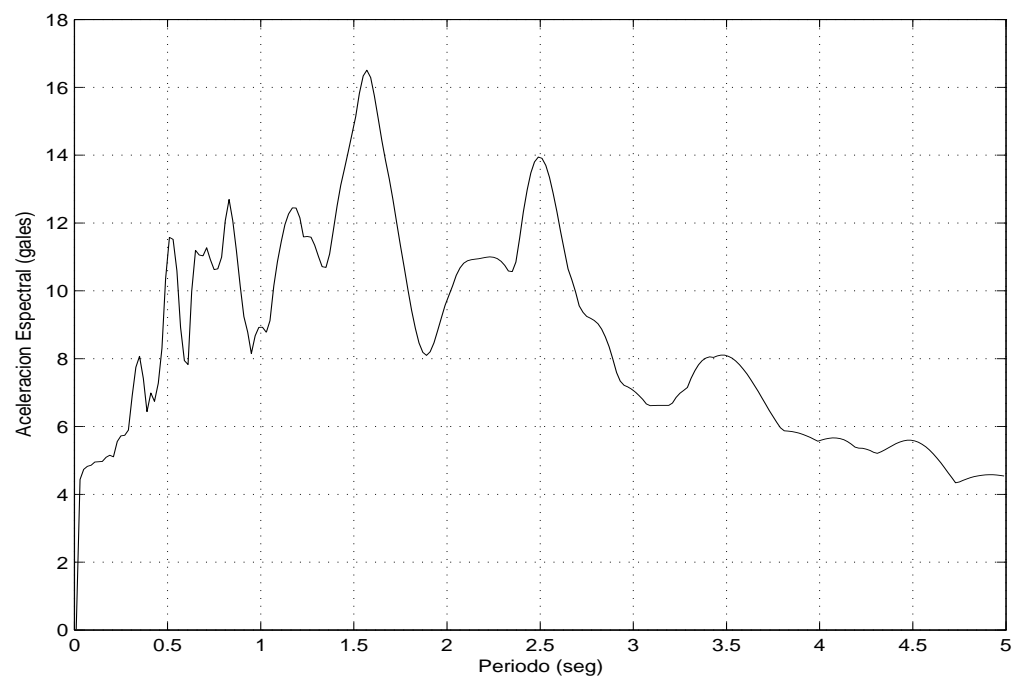


Figura 8.10: Espectro de respuesta del sismo del 21 de enero de 2003 en dirección Y.

momento sobre las diferencias que se observan en los parámetros identificados para cada sismo. Si bien es cierto que la respuesta registrada en cada evento es representativa del mismo edificio, con todo rigor, son a su vez representativas de sistemas “diferentes”, ya que las condiciones de masa, temperatura y hasta humedad hacen del inmueble un sistema variante en el tiempo. Por otro lado, a pesar de que lo recién mencionado es cierto, no acaba de explicar por sí mismo las diferencias que se observan, ya que estas mismas diferencias se observan también en la identificación que se hace utilizando las simulaciones con el modelo de elementos finitos, el cual por su propia naturaleza no presenta las condiciones de variabilidad del edificio real. En este caso, la única diferencia entre una identificación y otra estriba en la señal que se utiliza para excitar al sistema. Como se mencionó anteriormente, se utilizan los registros de aceleraciones en la base obtenidos de cada sismo como agente de excitación sobre el modelo, y es precisamente en esas señales en donde se puede encontrar una clave para explicar tales diferencias en un modelo que no varía sus características en el tiempo. De acuerdo con [50], cuando se lleva a cabo la identificación del sistema mediante una reducción del modelo - lo cual es precisamente lo que se propone en este trabajo dada la complejidad de las estructuras civiles y la cantidad limitada de sensores para instrumentarla - se genera un error debido a la pérdida de información por el truncamiento del modelo mismo. Dependiendo del tipo de algoritmo subespacial que se utilice, el error queda condicionado a diferentes variables, sin embargo, de forma general, se puede concluir que el error en el modelo llega a ser pequeño cuando la señal de entrada es rica en su contenido de frecuencias, lo cual lleva a un resultado intuitivo: mucha energía de entrada en una banda determinada de frecuencias producirá un modelo (y una identificación de los parámetros del modelo) muy precisa en dicha banda. Asimismo, el error tiende a ser pequeño en bandas de frecuencia para las cuales la razón entrada a ruido es grande. Partiendo de estas observaciones, se hace evidente la dependencia que tiene la identificación respecto del contenido de frecuencias de la señal de entrada al algoritmo, la cual, en el caso del inmueble en estudio, depende del inmueble en su mayor parte, pero también depende de la señal de excitación que genera la historia de aceleraciones con las que se lleva a cabo la identificación. De lo anterior se concluye que, más allá de la variabilidad en el tiempo del sistema, las señales con las que se identifican los parámetros del sistema tienen pequeñas diferencias entre sí, debido al contenido de frecuencias en el movimiento del terreno para cada sismo en particular.

Siguiendo adelante, los resultados mostrados en el cuadro 8.17 resultan ser de particular interés. En él se muestran los valores de las normas cuadráticas de las matrices de rigidez obtenidas para modelos del edificio en el que se considera condiciones de falla progresiva en el inmueble. Como puede observarse, un potencial deterioro progresivo en el inmueble puede ser detectado mediante la norma

cuadrática calculada, y no así mediante alguna variación en los períodos de los modos fundamentales. *Lo anterior ratifica lo comentado en la literatura, sobre la dificultad que representa el establecer la detección de fallas en términos de variaciones de los períodos fundamentales de los sistemas en estudio.* En la referencia [11] se puede encontrar una de las listas más completas de referencias sobre este tema, dentro de las cuales se encuentra un buen número que avalan los resultados que aquí se han encontrado.

Otro aspecto notable de comentar es el hecho de que, si bien es cierto que las variaciones observadas entre los valores calculados de las normas cuadráticas para las diferentes condiciones de falla son evidentes, cuando se comparan éstos con los valores presentados en los cuadros 8.7 y 8.13 se puede hacer la siguiente puntualización.

Nota 8.3 *Es clara la dificultad que representaría en etapas iniciales del deterioro de la rigidez en un caso real, el establecer si la variación, respecto de un valor teórico, del valor de la norma cuadrática que se está observando en ese momento, se debe a una falla en el inmueble, o bien, a la señal que está generando el sismo.*

Este problema no es menor, y de acuerdo con lo obtenido en esta investigación, es necesario hacer participar criterios adicionales para poder discretizar con mayor precisión la aparición de fallas en el inmueble. Uno de los criterios tradicionales utilizado en la Ingeniería Estructural para determinar la aparición de daños en los elementos estructurales, es el valor del desplazamiento relativo de entrepiso. Este parámetro permite establecer límites que no deben ser sobrepasados en las estructuras y de hecho es parte de las reglamentaciones en la mayoría de los países con gran incidencia de movimientos telúricos. Actualmente está siendo utilizado para detectar daño en estructuras civiles con niveles de instrumentación mayores al instalado en el inmueble en estudio [6]. Como muestra de cómo se podría utilizar en combinación con la identificación utilizada en esta investigación, se muestran en el cuadro 8.18 los valores de los desplazamientos relativos de entrepiso máximos (DREM) calculados utilizando el modelo de elementos finitos, y los valores de la normas cuadráticas de las matrices de rigidez equivalentes (NCMRE) para cada uno de los sismos analizados y para los niveles de falla considerados. Como se puede observar, a pesar de que las normas cuadráticas calculadas para los diferentes sismos y para las etapas iniciales del deterioro de la rigidez pueden ser muy cercanas, el desplazamiento relativo de entrepiso máximo resulta ser un parámetro certero para distinguir condiciones de falla en el inmueble. Ahora bien, dada la instrumentación parcial con que cuenta el inmueble, es imposible establecer los desplazamientos relativos de entrepiso para cada uno de los niveles de la estructura que nos permitan establecer comparaciones como las mostradas en el cuadro 8.18, sin embargo,

se puede trabajar en un criterio similar a este para complementar la detección de fallas con el procedimiento propuesto en este trabajo.

Sismo o Condición \ Dirección	Transversal		Longitudinal	
	DREM	NCMRE	DREM	NCMRE
13/01/2001	0.000450	49.84	0.000197	55.16
16/01/2001	0.000418	50.07	0.000195	134.77
30/01/2001	0.000400	54.22	0.000157	155.01
18/04/2002	0.000430	53.01	0.000197	145.90
21/01/2003	0.001002	51.66	0.000599	138.01
Falla 1	0.004683	50.53	0.002732	130.50
Falla 2	0.006475	50.52	0.005125	130.15
Falla 3	0.006562	49.36	0.005157	117.62
Falla 4	0.016932	49.13	0.015732	110.80
Falla 5	0.023303	47.63	0.021275	28.73
Falla 6	0.026981	35.36	0.019693	21.06

Cuadro 8.18: Desplazamientos relativos máximos de entrepiso y normas cuadráticas de las matrices de rigidez equivalentes del modelo de elementos finitos calculadas para cada sismo y cada condición de falla analizada.

Por último, si bien es cierto que, a partir de los resultados obtenidos, se puede considerar a las normas cuadráticas de las matrices de rigidez equivalentes como un medio para detectar fallas, no es posible llevar a cabo la localización de las mismas a través de dicho parámetro, o a través de la estructura de las matrices de rigidez equivalentes, ya que la distribución de daños se da en varios niveles a la vez, y las matrices equivalentes obtenidas resultan ser elementos muy limitados

para captar tales sucesos. El complementar el presente estudio con un criterio como el mencionado en el párrafo anterior, puede ayudar a salvar la dificultad que aquí se vislumbra.

Conclusiones Generales y Perspectivas de Investigación

En este último capítulo se hará una recapitulación del trabajo presentado y de las posibles alternativas de investigación a desarrollar.

Conclusiones Generales

Se ha intentado presentar un panorama general del estado del arte en la investigación sobre la detección e identificación de fallas en estructuras civiles. Si bien esta es una disciplina que se ha venido desarrollando durante los últimos veinte años, las necesidades por cubrir aún son muchas, principalmente en países como México, que a pesar de contar con una gran tradición en el campo de la Ingeniería Sísmica, estos últimos desarrollos interdisciplinarios aún no permean en el gremio profesional especializado.

Se ha planteado la posibilidad de un lenguaje común entre dos disciplinas de la ingeniería con grandes posibilidades en el país. Por un lado, el Control Automático con una gama amplia de técnicas y algoritmos encaminados al análisis y control de sistemas electromecánicos y procesos industriales, y por el otro la Ingeniería Sísmica con una gran diversidad de necesidades que sólo se podrán resolver con las técnicas más avanzadas en el ámbito de la identificación y control de sistemas. Asimismo, la Ingeniería Sísmica al presentar nuevos retos también presenta formas alternativas de dar solución a los problemas que indudablemente enriquecerán a otras disciplinas como el Control Automático.

Se ha mostrado que los modelos matemáticos empleados por una y otra disciplina pueden llegar a ser equivalentes entre sí, con la ventaja de proveer de soluciones novedosas a ambas partes.

Se han estudiado e implementado técnicas de identificación en el espacio de estados, tales como los algoritmos de identificación ERA-OKID y Subespacial. Si bien ambos algoritmos se desarrollan en el espacio de estados y comparten los fundamen-

tos, es importante reconocer sus diferencias para obtener el mejor provecho de su utilización. De las comparaciones realizadas se puede concluir que ambos algoritmos dan excelentes resultados en sistemas en los que la complejidad se encuentra acotada en términos de sus características internas y en términos de las señales de entrada y salida con las que interactúan. Por otro lado, cuando se aplican a estructuras de una complejidad mayor como las estructuras civiles, se perciben problemas en cuanto al tipo de señal que se utiliza y al contenido de frecuencias de la misma. En particular, el algoritmo ERA-OKID ha mostrado ser más sensible a estas condiciones, mientras que el algoritmo Subespacial ha mostrado tener un mejor desempeño aún en las condiciones que se manejan en los sistemas de estructuras civiles.

Un punto importante a señalar es el hecho de que los algoritmos que se han utilizado han sido probados ampliamente y con excelentes resultados en sistemas en los que las señales, de entrada principalmente, son fácilmente reconocibles y predecibles, lo cual no puede aplicarse a las estructuras civiles, ya que las excitaciones a las que éstas se ven sometidas no son de ningún modo predecibles, y sus características varían drásticamente de un instante a otro, por lo que al implementar los algoritmos exitosos en el ámbito del Control Automático, se les somete a condiciones para las cuales no han sido desarrollados y en consecuencia su comportamiento puede no ser tan notable como lo ha demostrado ser en condiciones más favorables. Sin embargo, el hecho de seguir obteniendo resultados confiables a través de ellos, es un paso importante en su desarrollo mismo y en el desarrollo de la Ingeniería Sísmica desde el punto de vista del monitoreo de la salud estructural.

Por los resultados obtenidos se concluye que el algoritmo de identificación subespacial es una herramienta confiable para ser utilizada en la identificación de sistemas de estructuras civiles, ya que por su robustez y eficiencia computacional provee de resultados que pueden ser utilizados en procesos de identificación y detección de fallas en este tipo de sistemas.

El llevar a cabo la identificación de los sistemas estructurales en el dominio de las ecuaciones diferenciales de segundo orden que los describe, provee de ventajas importantes en tanto que es posible obtener directamente parámetros físicos de la estructura tales como masa, amortiguamiento y rigidez, que permiten tener una idea clara del estado de la misma. No obstante lo anterior, el utilizar algoritmos en este tipo exige el conocimiento previo de la estructura del sistema, lo cual, como ha sido demostrado en la identificación del edificio instrumentado mediante el método de mínimos cuadrados, es una tarea complicada y difícil de solucionar.

Se ha propuesto una metodología que combina ideas y conceptos básicos de la identificación de sistemas en el espacio de estados, con criterios de dinámica estructural, para llevar a cabo la detección de fallas en inmuebles parcialmente instrumentados. Si bien pueden encontrarse en la literatura procedimientos y técnicas

más elaboradas que parten del hecho de contar con una instrumentación mayor en los edificios, es importante seguir trabajando en técnicas que obtengan el mayor provecho de instrumentaciones más modestas.

Los resultados que se han obtenido permiten corroborar aspectos básicos en los criterios que tradicionalmente se siguen en la Ingeniería Sísmica; un ejemplo de ello es el haber podido comprobar que el porcentaje de amortiguamiento crítico en el edificio instrumentado es prácticamente del 5 %. Para cualquier persona que trabaje en el diseño sísmico de edificios probablemente le parecerá un dato trivial por ser ampliamente conocido, sin embargo, el poder comprobar de forma tan clara lo que los libros y la teoría dice resulta ser edificante. No hay que olvidar que muchos de los datos que se utilizan en el diseño sísmico de edificios, a pesar de lo que muchos puedan pensar, aún no tienen un sustento teórico confiable, y la práctica e investigación constante poco a poco van *descubriendo* y *explicando* por qué funciona lo que ya se sabe que funciona.

El hecho de que las estructuras civiles sean sistemas mecánicos sumamente complejos no sólo representa desventajas en el uso de algoritmos desarrollados para sistemas más simples, ya que gracias a su complejidad y tamaño, lo que en otros sistemas puede ser una complicación en su manejo, en ellos son aspectos que no modifican los resultados obtenidos; un ejemplo de ello puede ser el problema de los retardos, el cual en un sistema tan complejo como un edificio acaba por no ser problema.

Se ha observado que es necesario generar una serie de técnicas paralelas para el monitoreo de la salud estructural de un inmueble, ya que los resultados parciales que se obtienen con técnicas aisladas pueden generar conclusiones que carezcan de validez. Como ejemplo se puede tomar uno de los resultados del último capítulo, en el cual se encontró que una reducción en la norma cuadrática de las matrices de rigidez equivalentes del inmueble no siempre se debe a la aparición de una falla en la estructura, ya que también existe una disminución en ese parámetro cuando la señal de excitación presenta un período de vibración cercano al del inmueble, lo cual se conoce como resonancia; sin embargo, la resonancia no necesariamente generará un patrón de fallas en el inmueble como quedó demostrado con el sismo registrado en el edificio instrumentado el 13 de enero de 2001, aunque el procedimiento de detección de fallas haya dado como resultado un decremento en la norma cuadrática de las matrices de rigidez equivalentes calculadas.

Por último, aunque la línea de investigación de este trabajo no fue en torno de la no linealidad de las estructuras, se colaboró en investigaciones sobre el tema como complemento a la investigación doctoral [13] y [14].

Perspectivas de Investigación

Las perspectivas de investigación son variadas. Por un lado hay una línea abierta en la identificación del comportamiento lineal de las estructuras y otra en la identificación del comportamiento no lineal de las mismas. La primera de ellas va acorde a la forma en que comúnmente se modelan y diseñan la mayoría de los edificios en ciudades como la de México, aún sus construcciones más importantes siguen esta filosofía de diseño. Por otro lado, la tendencia a tomar en cuenta la no linealidad de las estructuras fuera del ámbito netamente académico es algo que poco a poco va adquiriendo mayor importancia, y si bien este cambio implica más que un cambio de métodos, un cambio de filosofía y costumbres, la mayoría de las veces regidas estas últimas por los aspectos económicos, es importante que la academia se encuentre preparada y sea ella misma impulsora de los cambios que en el futuro se irán generando en la práctica de la Ingeniería Estructural.

En cuanto a la línea de investigación del comportamiento lineal de las estructuras es importante que cada vez más ingenieros de ambas especialidades, el Control Automático y la Ingeniería Sísmica, interactúen entre sí para seguir aprovechando los aportes de cada una de sus disciplinas. En particular, se debe seguir investigando y analizando las bondades de los algoritmos subespaciales en la identificación de estructuras civiles; actualmente en Europa se han venido desarrollando investigaciones sobre su aplicación en sistemas de antenas de telecomunicación y en puentes, y si bien la configuración de un edificio es más complicada que dichas estructuras, es necesario seguir trabajando en nuevas técnicas que permitan obtener mejores resultados con estas metodologías.

Evidentemente también la investigación en torno a la identificación de los parámetros físicos que definen a la ecuación diferencial de segundo orden de los sistemas mecánicos debe ser atendida. La principal dificultad de estas técnicas es la exigencia de conocer de antemano la estructura del modelo, sin embargo, esta necesidad puede ser a la vez su mayor ventaja, ya que la investigación sobre la estructura de los sistemas siempre dará mayores luces para su comprensión, y por otro lado, de obtenerse mejores resultados con estas técnicas las perspectivas serán muy importantes, ya que se estaría en posibilidad de conocer más directamente el estado físico del inmueble. Las líneas de investigación en este campo pueden derivarse en el estudio del método de mínimos cuadrados con diferentes características, como los muchos que ya existen, o bien, se puede continuar con el estudio de algoritmos gradientes [14] y [35].

Una línea de investigación que ya se ha tratado en otras disciplinas, como la Ingeniería Eléctrica y Electrónica, es la que se refiere a la reducción y expansión de modelos. Es claro el hecho de que al tener sistemas con tantos grados de liber-

tad como los que tiene cualquier edificio es muy conveniente el contar con técnicas confiables de reducción de modelos para poder aplicar las metodologías ya desarrolladas en el Control Automático. Asimismo, una vez que ya se hayan obtenido los resultados esperados con dichas técnicas, será necesario traducir dichos resultados en vía opuesta al sistema original que dió origen al modelo reducido.

Una de las grandes ventajas que presenta el uso de algoritmos como el del método de mínimos cuadrados y el gradiente es su capacidad de trabajarlos en línea, por lo que el desarrollo de algoritmos subespaciales recursivos redundaría en grandes beneficios para la identificación de estructuras civiles en línea, eso siempre y cuando dichos algoritmos mantuvieran la robustez y capacidad computacional de los actuales algoritmos fuera de línea.

Un tema que se tocó en este trabajo de investigación, pero que por el curso de la misma no fue posible estudiar con mayor profundidad, es el del desarrollo de librerías en un ambiente de programación dirigido principalmente al modelado de sistemas mecánicos, como el que ofrece el lenguaje *Modelica*^{MR}. El incursionar también en estos temas será de gran beneficio para todos aquellos interesados en el tema.

Por último, la investigación en torno al monitoreo de la salud estructural de edificios se seguirá dando en las principales potencias tecnológicas del mundo, por lo que es urgente la necesidad de formar en nuestro país a especialistas en el tema que puedan entender y competir en este campo de la ingeniería, no por ser actualmente un tema de moda o novedad, sino porque ya es una necesidad que la ingeniería mexicana conozca y domine el tema si se pretende seguir siendo una de las ingenierías de referencia a nivel mundial por lo que a la Ingeniería Sísmica se refiere.

En resumen, desde el punto de vista del que presenta este trabajo, las líneas de investigación que pueden seguirse a raíz de lo desarrollado en este estudio se enumeran a continuación:

- Aplicación de los algoritmos de identificación subespacial en otros inmuebles instrumentados, con el fin de observar su funcionamiento y evaluar su eficacia con diferentes estructuraciones.
- Continuar la investigación en torno al desarrollo y puesta a punto de algoritmos subespaciales en línea.
- Profundizar en el modelado y en la interacción entre los diferentes componentes de los modelos de sistemas mecánicos descritos por ecuaciones diferenciales de segundo orden, con el fin de instrumentar algoritmos de identificación de sus principales parámetros sin recurrir al espacio de estados.

- Participar en el desarrollo de librerías en un ambiente de programación para el modelado de sistemas mecánicos; una excelente opción para ello es el lenguaje *Modelica*^{MR}.
- Participar en el desarrollo de prototipos de laboratorio que permitan experimentar y evaluar algoritmos de identificación para estructuras civiles, antes de ser instrumentados en estructuras reales, ya que con ello se logrará alcanzar una mejor comprensión de este tipo de sistemas evitando muchas de las complejidades que por su tamaño, presentan las edificaciones de gran escala.

Apéndice A

Fuentes de Información

En este apéndice se hará una breve reseña de las fuentes de información, y del camino recorrido por el que presenta este trabajo, para que sirva de guía a todos aquellos que utilicen este documento como referencia en futuras investigaciones.

Una de las principales dificultades que se tienen que salvar, cuando se comienza una investigación interdisciplinaria, es la de establecer un lenguaje común entre las disciplinas que confluirán en la investigación. Si el nuevo investigador tiene una formación previa en Ingeniería Civil, es muy importante que recurra a bibliografía básica que le introduzca en el ambiente del Control Automático. Existen varios textos que tocan el tema del Control Automático, sin embargo, un texto que sirve como puente entre ambas disciplinas es el trabajo de Luenberger [29], en él, el ingeniero civil podrá encontrar un contexto propicio para iniciar su estudio en los sistemas dinámicos desde una perspectiva diferente a la que comúnmente maneja. Por otro lado, si el nuevo investigador tiene una formación previa en Control Automático, uno de los textos que mejor le podría ayudar es el escrito por Gawronski [16], este trabajo presenta de forma muy simple y directa una introducción a la dinámica estructural desde un punto de vista de Control Automático.

Siguiendo en la búsqueda de formación antes de que información, después de haber dado los primeros pasos con alguno de los textos mencionados en el párrafo anterior, dos excelentes libros en los que se podrá seguir profundizando en los conceptos básicos son los escritos por Worden [54] y Nelles [35], y aunque ambos textos tratan de la identificación de sistemas no lineales, las bases que sientan para los sistemas lineales son de gran ayuda para aquellos que comienzan a incursionar en este campo.

La bibliografía obligada para aquellos que busquen conocer a profundidad los fundamentos y aplicaciones del algoritmo ERA-OKID es el texto de Juang al que se refiere la referencia [19], ya que todos los artículos de investigación que dieron

origen al algoritmo se encuentran englobados en él; un texto más actual y fácil de conseguir, pero que no contiene toda la información necesaria para entender los fundamentos del algoritmo, es el también escrito por Juang en colaboración con Phan y que se describe en la referencia [21]. Por otro lado, si el interés está enfocado a la identificación por medio de algoritmos subespaciales, el texto que concentra los avances en el estado del arte en ese campo es el escrito por Van Overschee y De Moor [50]. En cualquiera de los dos casos es conveniente tener como referencia de respaldo el libro de Ljung [27].

Existen diferentes textos en el tema de la dinámica estructural, sin embargo, el sustentante de este trabajo recomienda los escritos por Chopra [9] y Clough [7], este último de difícil adquisición hoy en día; en su defecto el escrito por Paz [37] es también una buena opción.

Para adentrarse en las diferentes investigaciones que se han venido realizando en las últimas dos décadas, es obligado el estudio del documento elaborado por el Laboratorio Nacional de Los Alamos [11] y que es fácilmente localizable en la red cibernética (*Internet*). También existen diversas páginas electrónicas en donde se puede encontrar información muy valiosa, entre ellas se cuentan las siguientes:

- Página electrónica personal del Dr. Dionisio Bernal (Universidad de North-Eastern)
- Página electrónica de la Universidad de Columbia Británica (Vancouver). En ella se podrán encontrar muchas ligas de interés.
- Página electrónica personal del Dr. Carlos Ventura (Universidad de Columbia Británica)

Por último, dos fuentes de información de suma importancia es la *Biblioteca de Ingeniería Eléctrica del CINVESTAV* y la *Biblioteca Enzo Levi de la DEPFI-UNAM*. Sin embargo, si en ninguna de estas dos bibliotecas se encuentran los artículos de investigación requeridos, se puede acudir a la biblioteca *Linda Hall Library of Science, Engineering & Technology*, y cuya página electrónica pone a disposición de los investigadores una enorme cantidad de artículos científicos y técnicos para acceder a ellos por medios electrónicos, los costos por cada artículo fluctúan entre los \$14.00 y \$20.00 USD.

Apéndice B

Trabajos Publicados

- Gómez-González, B., Martínez-García, J.C., Martínez-Guerra, R., Garrido, R. and Rivero-Angeles, F.J. *Single Degree-of-freedom System Identification Using Least Squares And Subspace Methodologies*. 13th World Conference on Earthquake Engineering WCEE, Vancouver, Canada, 2004, CD.
- Martínez-García, J.C., Gómez-González, B., Martínez-Guerra R. and Rivero - Angeles, F.J., *Parameter Identification of Civil Structures Using Partial Seismic Instrumentation*. 5th Asian Control Conference ASCC, Melbourne, Australia, 2004, pp. 1637-1642.
- Rivero-Angeles, Gómez-González, B., F.J., Martínez-García, J.C., Garrido, R. and Martínez-Guerra, R., *Mathematical Model Comparison between Robot-Manipulators and Shear-Buildings Subjected to Base Excitation*. 5th Asian Control Conference ASCC, Melbourne, Australia, 2004, pp. 1643-1651.

Apéndice C

Trabajos Sometidos

- Gómez-González, B., Martínez-García, J.C., Martínez-Guerra, R., Garrido, R. and Rivero-Angeles, F.J. *Illustrating the Identification of Civil Structures Via State-Space and Second Order Techniques*. Journal of Structural Engineering. ASCE.
- Gómez-González, B., Martínez-García, J.C., Martínez-Guerra, R., Garrido, R. and Rivero-Angeles, F.J. *Fault Detection of Real Buildings with Partial Seismic Instrumentation*. Journal of Engineering Mechanics. ASCE.

Bibliografía

- [1] Aktan A.E., Lee K.L., Chuntavan C., Aksel T., 1994, Modal testing for structural identification and condition assessment of constructed facilities, in Aktan A.E., Lee K.L., Chuntavan C., Aksel T., *Proc. of the 12th International Modal Analysis Conference*, pp. 462-468.
- [2] Begg R.D., Mackenzie A.C., Dodds C.J., Loland O., 1976, Structural integrity monitoring using digital processing of vibration signals, in Begg R.D., Mackenzie A.C., Dodds C.J., Loland O., *Proc. of the 8th Annual Offshore Technology Conference*, Houston, TX, pp. 305-311.
- [3] Brincker R., Kirkegaard P.H., Anderson P., Martínez M.E., 1995, Damage detection in an offshore structure, in Brincker R., Kirkegaard P.H., Anderson P., Martínez M.E., *Proc. of the 13th International Modal Analysis Conference*, 1, pp. 661-667.
- [4] Bernal D., Gunes B., 2002, Damage localization in output-only systems: A flexibility based approach, in Bernal D. and Gunes B., *IMAC-XX 2002*, pp. 1185-1191.
- [5] Cawley P., Adams R.D., 1979, The location of defects in structures from measurements of natural frequencies, in Cawley P., Adams R.D., *Journal of Strain Analysis*, 14 (2), pp. 49-57.
- [6] Çelebi M., Sanli A., Sinclair M., Gallant S., Radulescu D., 2004, Real-Time Seismic Monitoring Needs of a Building Owner - and the Solution: A Cooperative Effort, in Çelebi M., Sanli A., Sinclair M., Gallant S., Radulescu D., *Earthquake Spectra Vol.20 No.*, pp. 333-346.
- [7] Clough R., Penzien J., 1993, *Dynamics of Structures*, Mc Graw-Hill.
- [8] Coppolino R.N., Rubin S., 1980, Detectability of structural failures in offshore platforms by ambient vibration monitoring, in Coppolino R.N., Rubin S., *Proc. of the 12th Annual Offshore Technology Conference*, 4, pp. 101-110.

- [9] Chopra A.K., 2001, *Dynamics of Structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering*, Prentice Hall.
- [10] Doebling S.W., 1995, Measurement of structural flexibility matrices for experiments with incomplete reciprocity, Ph.D. Dissertation, University of Colorado, Boulder, CO, Department of Aerospace Engineering Sciences, CU-CAS-95-10.
- [11] Doebling S.W., Farra, C.R., Prime M.B., Shevitz D.W., 1996, *Damage Identification and Health Monitoring of Structural and Mechanical Systems from Changes in their Vibration Characteristics: A Literature Review*, Los Alamos National Laboratory.
- [12] Duggan D.M., Wallace E.R., Caldwell S.R., 1980, Measured and predicted vibrational behavior of Gulf of Mexico Platforms, in Duggan D.M., Wallace E.R., Caldwell S.R., *Proc. of the 12th Annual Offshore Technology Conference*, pp. 92-100.
- [13] Garrido r., Rivero-Angeles F.J., Martinez-Guerra R., Gomez-Gonzalez B., Martinez-Garcia J.C., 2004, Nonlinear Restoring Force Estimation in Civil Structures Using a High Gain Observer. *5th Asian Control Conference ASCC*, Melbourne, Australia, 2004, pp. 1631-1636.
- [14] Garrido R., Rivero-Angeles F.J., Gomez-Gonzalez B., Martinez-Garcia J.C., Martinez-Guerra R., 2004, Gradient Algorithm for On-Line Estimation of Parameters and Nonlinear Restoring Forces in Civil Structures. *American Control Conference ACC*, Boston, Mass., 2004, pp. 4770-4775.
- [15] Gauss K.F., 1809, *Theoria Motus Corporum Celestium, English Translation: Theory of the Motion of Heavenly Bodies*, Dover (1963).
- [16] Gawronski W.K., 1998, *Dynamics and Control of Structures. A Modal Approach*, Springer.
- [17] Gómez-González, B., Martínez-García, J.C., Martínez-Guerra, R., Garrido, R. and Rivero-Angeles, F.J., 2004, Single Degree-of-freedom System Identification Using Least Squares And Subspace Methodologies. *13th World Conference on Earthquake Engineering WCEE*, Vancouver, Canada, 2004, CD.
- [18] Gysin H.P., 1986, Critical application of an error matrix method for location of finite element modeling inaccuracies., in Gysin H.P., *Proc. of the 4th International Modal Analysis Conference*, pp. 1339-1351.
- [19] Juang J., 1994, *Applied System Identification*, Prentice Hall.

- [20] Juang J., Pappa R., 1985, An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction, in Juang J. and Pappa R., *Journal of Guidance Control and Dynamics Vol.8 No.5*, pp. 620-627.
- [21] Juang J., Phan M., 2001, *Identification and Control of Mechanical Systems*, Cambridge University Press.
- [22] Kenley R.M., Dodds C.J., 1980, West sole WE Platform: Detection of damage by structural response measurements, in Kenley R.M., Dodds C.J., *Proc. of the 12th Annual Offshore Technology Conference*, pp. 111-118.
- [23] Ko J.M., Wong C.W., Lam H.F., 1994, Damage detection in steel framed structures by vibration measurement approach, in Ko J.M., Wong C.W., Lam H.F., *Proc. of the 12th International Modal Analysis Conference*, pp. 280-286.
- [24] Kondo I., Hamamoto T., 1994, Local damage detection of flexible offshore platforms using ambient vibration measurements, in Kondo I., Hamamoto T., *Proc. of the 4th International Offshore and Polar Engineering Conference*, 4, pp. 400-407.
- [25] Kramer S.L., 1996, *Geotechnical Earthquake Engineering*, Prentice Hall.
- [26] Lin C.S., 1994, Unity check method for structural damage detection, in Lin C.S., *Proc. of the 35th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, AIAA-94-1717-CP, pp. 347-354.
- [27] Ljung L., 1999, *System Identification. Theory for the User*, Prentice Hall PTR.
- [28] Loland O., Dodds J.C., 1976, Experience in developing and operating integrity monitoring system in North Sea, in Loland O., Dodds J.C., *Proc. of the 8th Annual Offshore Technology Conference*, pp. 313-319.
- [29] Luenberger D.G., 1979, *Introduction to Dynamic Systems. Theory, Models, & Applications*, Springer.
- [30] Martínez-García, J.C., Gómez-González, B., Martínez-Guerra R. and Rivero - Angeles, F.J., 2004, Parameter Identification of Civil Structures Using Partial Seismic Instrumentation. *5th Asian Control Conference ASCC*, Melbourne, Australia, 2004, pp. 1637-1642.
- [31] Mayes R.L., 1995, An experimental algorithm for detecting damage applied to the I-40 Bridge over the Rio Grande, in Mayes R.L., *Proc. of the 13th International Modal Analysis Conference*, pp. 219-225.

- [32] Meirovitch L., 1976, *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan Publishing Co.
- [33] Meisel J., 1966, *Principles of Electromechanical - Energy Conversion*, Mc Graw-Hill.
- [34] Nataraja R., 1983, Structural integrity monitoring in real seas, in Nataraja R., *Proc. of the 15th Annual Offshore Technology Conference*, pp. 221-228.
- [35] Nelles O., 2001, *Nonlinear System Identification*, Springer.
- [36] Osegueda R.A., Dsouza P.D., Qiang Y., 1992, Damage evaluation of offshore structures using resonant frequency shifts, in Osegueda R.A., Dsouza P.D., Qiang Y., *Serviceability of Petroleum, Process, and Power Equipment*, ASME PVP 239/MPC 33, pp. 31-37.
- [37] Paz M., 1997, *Structural Dynamics, Theory and Computation*, Chapman & Hall.
- [38] Peterson L.D., Alvin K.F., Doebling S.W., Park K.C., 1993, Damage detection using experimentally measured mass and stiffness matrices, in Peterson L.D., Alvin K.F., Doebling S.W., Park K.C., *Proc. of the 34th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, AIAA-93-1482-CP, pp. 1518-1528.
- [39] Rivero-Angeles F. J., Gomez-Gonzalez B., Martinez-Garcia J. C., Garrido R., Martinez-Guerra R., 2004, Mathematical Model Comparison between Robot-Manipulators and Shear-Buildings Subjected to Base Excitation, in Rivero-Angeles F. J., Gomez-Gonzalez B., Martinez-Garcia J. C., Garrido R., Martinez-Guerra R., *5th Asian Control Conference ASCC*, Melbourne Australia, pp. 1643-1651.
- [40] Rytter A., 1993, Vibration based inspection of civil engineering structures, Ph. D. Dissertation, Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, Denmark.
- [41] Salawu O.S., Williams C., 1993, Structural damage detection using experimental modal analysis-A comparison of some methods, in Salawu O.S., Williams C., *Proc. of the 11th International Modal Analysis Conference*, pp. 254-260.
- [42] Salawu O.S., Williams C., 1995, Bridge assessment of structures using forced-vibration testing, in Salawu O.S., Williams C., *Journal of Structural Engineering*, 121(2), pp. 161-173.

- [43] Skjaerbaek P.S., Nielsen S.R.K., Cakmak A.S., 1996, Assessment of damage in seismically excited RC-Structures from a single measured response, in Skjaerbaek P.S., Nielsen S.R.K., Cakmak A.S., *Proc. of the 14th International Modal Analysis Conference*, pp. 133-139.
- [44] Spong M., Vidyasagar M., 1989, *Robot Dynamics and Control*, Wiley.
- [45] Srinivasan M.G., Kot C.A., 1992, Effects of damage on the modal parameters of a cylindrical shell, in Srinivasan M.G., Kot C.A., *Proc. of the 10th International Modal Analysis Conference*, pp. 529-535.
- [46] Tedesco J., Mc Dougal W., Ross C., 1999, *Structural Dynamics, Theory and Applications*, Addison Wesley.
- [47] Tiller M.M., 2001, *Introduction to Physical Modeling with Modelica*, Kluwer Academic Publishers.
- [48] Toksoy T., Aktan A.E., 1994, Bridge-condition assessment by modal flexibility, in Toksoy T., Aktan A.E., *Experimental Mechanics*, 34, pp. 271-278.
- [49] Vandiver J.K., 1977, Detection of structural failure on fixed platforms by measurement of dynamic response, in Vandiver J.K., *Journal of Petroleum Technology*, March, pp. 305-310.
- [50] Van Overschee P., De Moor B., 1996, *Subspace Identification for Linear Systems*, Kluwer Academic Publishers.
- [51] West W.M., 1984, Illustration of the use of modal assurance criterion to detect structural changes in an orbiter test specimen, in West W.M., *Proc. of the Air Force Conference on Aircraft Structural Integrity*, pp. 1-6.
- [52] Whittome T.R., Dodds C.J., 1983, Monitoring offshore structures by vibration techniques, in Whittome T.R., Dodds C.J., *Proc. of Design in Offshore Structures Conference*, pp. 93-100.
- [53] Wojnarowski M.E., Stiansen S.G., Reddy N.E., 1977, Structural integrity evaluation of a fixed platform using vibration criteria, in Wojnarowski M.E., Stiansen S.G., Reddy N.E., *Proc. of the 9th Annual Offshore Technology Conference*, pp. 247-256.
- [54] Worden K., Tomlinson G.R., 2001, *Nonlinearity in Structural Dynamics. Detection, Identification and Modelling*, Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia.

- [55] The Math Works Inc., 2000, *Matlab Release 12*.

Índice alfabético

- Aceleración, 15, 17, 19, 40, 43, 49, 55, 70, 79, 107, 116, 123
Del Terreno, 116
Vector, 18
- Amortiguador, 8, 37, 38, 41, 54, 70
Rotacional
Adyacente, 10
Concentrado, 8
- Amortiguamiento, 1, 8, 12, 18, 20, 22, 24, 26, 32, 35, 37–39, 41, 43, 57, 64, 69, 70, 87, 102, 107, 146
Crítico, 39–41, 49, 54, 61, 62, 147
Modal, 26, 27, 43, 110
- Amplitud, 3, 126
Modal, 27
- Articulación, 124, 125
- Control Automático, 7, 25, 145, 146, 148, 149, 151
- Coordenada, 12, 13, 22, 106
Física, 43
Generalizada, 8, 12, 21
Modal, 21, 24, 32, 35, 106
No Generalizada, 13
Transformación, 106
- Daño, 1–4, 123, 142
Acumulación, 125
Cuantificación, 2
Detección, 1–3, 142
Distribución, 143
Generación, 123
- Identificación, 1–3
Localización, 1–3, 123
Severidad, 3
- Deformación, 8, 15
- Desplazamiento, 3, 4, 12, 15, 17, 18, 24, 40, 46, 49, 55, 70, 79, 103, 107
De Entrepiso, 126, 142
Modal, 22, 27, 125
Relativo, 67, 142
Vector, 18
- Edificio, 5, 7, 8, 19, 46, 47, 62, 95, 105–107, 116, 122, 125, 126, 131, 141, 147–149
De Cortante, 12, 103
Diseño, 62, 122, 147, 148
Instrumentado, 46, 49, 60, 62, 64, 95, 102, 103, 109, 116, 146, 147
- Equilibrio
Posición, 66
Punto, 25
Asintóticamente Estable, 25
Estable, 25
Inestable, 25
- ERA-OKID, 29, 40, 52, 55, 57, 60–63, 145, 146, 151
- Error, 4, 40, 41, 49, 55, 56, 61, 141
Cuadrático, 63
- Estabilidad, 25, 26
Asintótica, 26
- Estructural
Análisis, 62

- Cálculo, 122
 Comportamiento, 5
 Dinámica, 7, 13, 17, 22, 49, 146, 151, 152
 Elemento, 122, 123, 126, 142
 Ingeniería, 7, 142, 148
 Modelo, 24
 Parámetro, 95
 Salud
 Monitoreo, 1, 5, 146, 147, 149
 Sistema, 4, 146
 Estructuras Civiles, 1–5, 7, 12, 15, 18, 20, 22–24, 26, 46, 63, 64, 95, 105, 106, 109, 122, 141, 142, 145–150
 Flexibles, 7
 Modelado, 7

 Falla, 116, 122–126, 142, 147
 Detección, 1, 7, 103, 105, 107, 108, 116, 142, 143, 145–147
 Identificación, 1–3, 15, 105, 109, 122, 145
 Mecanismo, 122, 123, 125
 Patrón, 147
 Progresiva, 109, 125, 141
 Forma Modal, 1, 3, 4, 20, 21, 27, 32, 43, 45, 58, 60, 106, 107, 110, 125
 Cambio, 3
 Derivada, 3
 Frecuencia, 2, 3, 7, 20–24, 26, 27, 32, 35, 106, 126, 141
 Alta, 126
 Amortiguada, 18, 26
 Baja, 4, 126
 Circular, 43
 Contenido, 49, 102, 125, 126, 141, 146
 Modal, 1, 2
 Cambio, 2

 Inestabilidad, 125

 Asintótica, 25
 Instrumentación, 46, 47, 109, 142, 147
 Parcial, 5, 105, 110, 125, 126, 142

 Kalman
 Filtro, 30, 51
 Ganancia, 66

 Mínimos Cuadrados, 63, 64, 66, 67, 70, 79, 95, 102, 146, 148, 149
 Masa, 1, 4, 8, 10, 12, 18, 37, 38, 41, 43, 46, 54, 57, 64, 66–68, 70, 79, 95, 102, 106, 107, 141, 146
 Concentrada, 66, 69
 Interacción, 103
 Modal, 43, 107
 Modelado, 7, 149
 Estructuras, 12
 Matemático, 7
 Robots, 8
 Sistemas Mecánicos, 149, 150

 Norma, 108
 Cuadrática, 108, 110, 116, 124, 126, 131, 141–143, 147

 Observador, 30–32
 Markov, 30

 Péndulo Invertido, 8, 10
 Parámetro
 Modal, 17, 27, 28, 32, 49, 52, 61, 105, 106, 110
 Período, 40, 41, 43, 45, 47, 49, 54, 55, 58, 60, 62, 110, 126, 130
 Alto, 126
 De Excitación, 39, 41, 130, 147
 Movimiento del Terreno, 126, 130
 Natural, 39, 41, 43, 45, 54, 58, 61, 130
 Variación, 142

- Puente, 1, 4, 105, 148
- Resonancia, 7, 130, 131, 147
- Resorte, 8, 37, 38, 41, 43, 54, 70
 Helicoidal, 15
 Rotacional
 Adyacente, 10
 Concentrado, 8
- Rigidez, 1, 4, 8, 12, 15, 18, 37, 38, 43, 57, 64, 68–71, 79, 87, 88, 95, 102, 107, 125, 131, 141, 142, 146
 Adyacente, 10
 Concentrada, 8
 Degradación, 109, 123
 Deterioro, 122
 Disminución, 71, 79
 Equivalente, 46, 106–110, 116, 124–126, 131, 142, 143, 147
 Matriz de Error, 4
 Matriz Estática, 3
 Medida, 4, 5
 Modal, 107
- Ruido, 29, 33, 39, 47, 49, 61, 71, 88, 102, 141
 Blanco, 39, 41, 43, 49, 54–57, 71, 79, 88
- Sísmica
 Excitación, 7, 37
 Ingeniería, 24, 145–149
 Onda, 126, 130
- Sensor, 1, 3, 5, 29, 33, 46, 47, 106, 116, 125, 141
 Localización, 32
 Número de, 102
- Sismo, 47, 107, 109, 110, 116, 122, 126, 130, 131, 141, 142, 147
 13 de Enero de 2001, 110, 126, 130, 131
 16 de Enero de 2002, 110, 130
 18 de Abril de 2002, 110, 130
 21 de Enero de 2003, 46, 60, 95, 110, 123, 130
 30 de Enero de 2002, 110, 130
 El Centro, 37, 38, 40, 41, 43, 49, 71, 79
 SCTEO, 38, 40, 43, 45, 49, 58, 61, 79, 88
- Subespacial, 51, 52, 54, 57, 59, 63, 109, 141, 145, 146, 148, 149, 152
- Velocidad, 15, 17, 18, 40, 49, 55, 70, 79, 107
 Modal, 24, 27
 Relativa, 67
 Vector, 18