EJEMPLO DEL CÁLCULO DE LOS ESFUERZOS PERMISIBLES POR COMPRESIÓN AXIAL Y POR FLEXIÓN ALREDEDOR DEL EJE DE MAYOR MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL

DISEÑO ESTRUCTURAL

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE MÉXICO

Profesor:

Dr. Bernardo Gómez González

México, D.F. Abril 2007

אב

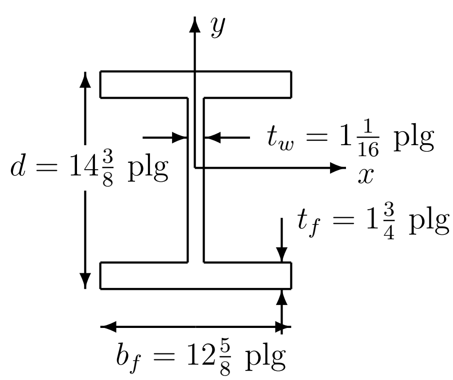
Capítulo 1

Ejemplo de aplicación

El problema que motiva este ejemplo de aplicación es el de una columna que estará sometida a los siguientes elementos mecánicos:

$$
\begin{aligned}
P_u &= 240 \text{ klb}, & & \\
M_{uxI} &= 80 \text{ klb} \cdot \text{pie} & & \text{Extremo superior}, \\
M_{uxS} &= 60 \text{ klb} \cdot \text{pie} & & \text{Extremo inferior}.
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

La sección transversal de la columna se muestra en la siguiente figura.



La altura total de la columna es de 14 pies, y sólo tiene arriostramiento lateral en sus extremos superior e inferior. Se requiere encontrar los esfuerzos admisibles por:

a) Compresión axial.

b) Flexión alrededor del eje de mayor momento de inercia de la sección transversal.

1.1. Cálculos preliminares

Para la obtención de los esfuerzos permisibles ante compresión axial y momento flexionante, es necesario hacer una serie de cálculos cuyos resultados nos serán de utilidad en los cálculos posteriores. Los cáculos que se harán en esta sección pueden ser omitidos si se cuenta con un manual de perfiles de acero, en el que se encuentren las propiedades geométricas de la sección transversal en estudio.

Los cálculos que se muestran a continuación nos permiten obtener el área, los momentos de inercia alrededor de los ejes principales y los radios de giro, también alrededor de los ejes principales, de la sección transversal de la columna.

$$\begin{aligned} A &= 2b_f t_f + (d - 2t_f)\, t_w, \\ A &= 2(12.625)(1.75) + \big(14.375 - (2)\,(1.75)\,\big)(1.0625), \\ A &= 55.7 \text{ plg}^2. \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{12} t_w \,(d - 2t_f)^3 + 2\left[\frac{1}{12} b_f t_f^3 + b_f t_f \left(\frac{d}{2} - \frac{b_f}{2}\right)^2\right], \\ I_x &= \left(\frac{1}{12}\right)(1.0625)\big(14.375 - (2)\,(1.75)\,\big)^3 + \\ &+ (2)\left[\left(\frac{1}{12}\right)(12.625)(1.75)^3 + (12.625)(1.75)\left(\frac{14.375}{2} - \frac{1.75}{2}\right)^2\right], \\ I_x &= 114.0 + 1772, \\ I_x &= 1886 \text{ plg}^3. \end{aligned} \tag{1.3}$$

אב

$$
\begin{aligned}
I_y &= \frac{1}{12}\left(d-2t_f\right)t_w^3 + 2\left[\frac{1}{12}t_f b_f^3\right], \\
I_y &= \left(\frac{1}{12}\right)\big(14.375-(2)\,(1.75)\,\big)(1.0625)^3 + \\
&+ (2)\left[\left(\frac{1}{12}\right)(1.75)(12.625)^3\right], \\
I_y &= 1.088 + 587, \\
I_y &= 588 \text{ plg}^3. \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_x &= \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \\
r_x &= \sqrt{\frac{1886}{55.7}}, \\
r_x &= 5.82 \text{ plg}. \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_y &= \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \\
r_y &= \sqrt{\frac{588}{55.7}}, \\
r_y &= 3.25 \text{ plg}. \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

1.2. Inciso a

Una vez que hemos obtenido las propiedades geométricas básicas de la sección transversal de la columna, procedemos a calcular el esfuerzo admisible por compresión axial. A continuación se describen los pasos a seguir.

Cálculo de las relaciones de esbeltez

Se deberán calcular las dos relaciones de esbeltez de la columna alrededor de los ejes principales de la sección transversal. En este caso es importante señalar que las longitudes no arriostradas contra pandeo alrededor de los dos ejes principales es la misma, ya que no existe ningún elemento que restrinja el desplazamiento lateral de la columna en algún punto intermedio de su altura total.

Por lo anterior se tiene que,

$$\begin{aligned} L_x &= L_y = L \\ L_x &= L_y = (14)(12) \\ L_x &= L_y = 168 \text{ plg.} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Una vez establecidas las longitudes no arriostradas contra pandeo alrededor de los dos ejes principales de la sección transversal, se procede a calcular las relaciones de esbeltez alrededor de ambos ejes:

$$\begin{aligned} \frac{k_x L_x}{r_x} &= \frac{(1)(168)}{5.82}, \\ \frac{k_x L_x}{r_x} &= 28.9 \ . \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} \frac{k_y L_y}{r_y} &= \frac{(1)(168)}{3.25}, \\ \frac{k_y L_y}{r_y} &= 51.7 \ . \end{aligned} \tag{1.9}$$

Para calcular el esfuerzo admisible por compresión axial se considera a la mayor relación de esbeltez de entre las dos calculdas. Por lo tanto, la relación de esbeltez que se utilizará en el resto de los cálculos tendrá el valor de 51.7.

Comparación de la relación de esbeltez seleccionada con la relación de esbeltez crítica

La relación de esbeltez crítica se calcula como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} C_c &= \pi \sqrt{\frac{2E}{F_y}}, \\ C_c &= \pi \sqrt{\frac{(2)(30 \times 10^3)}{36}}, \\ C_c &= 130 \ . \end{aligned} \tag{1.10}$$

אב

En este caso, la relación de esbeltez de la columna resulta menor a la relación de esbeltez crítica, por lo que la falla de este elemento estructural estará regida por la fluencia del material y no por el pandeo del elemento.

$$\frac{k_y L_y}{r_y} = 51.7 < C_c = 130 \ . \tag{1.11}$$

Cálculo del esfuerzo admisible por compresión axial

De acuerdo con el resultado anterior, el cálculo del esfuerzo admisible por compresión axial en la columna se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
F_a &= \frac{F_y \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{k_y L_y}{r_y}}{C_c}\right)^2\right]}{\frac{5}{3} + \frac{3}{8}\left(\frac{\frac{k_y L_y}{r_y}}{C_c}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{\frac{k_y L_y}{r_y}}{C_c}\right)^3}, \\
F_a &= \frac{(36)\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{51.7}{130}\right)^2\right]}{\frac{5}{3} + \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{51.7}{130}\right) - \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{51.7}{130}\right)^3}, \\
F_a &= \frac{33}{1.81}, \\
F_a &= 18 \ \frac{\text{klb}}{\text{plg}^2}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

1.3. Inciso b

La solución del problema continúa con el cálculo del esfuerzo admisible por flexión alrededor del eje de mayor momento de inercia de la sección transversal. Al igual que en el inciso a), se irán indicando a continuación los pasos a seguir.

Determinar si la sección es compacta o no compacta

La sección es compacta si se cumple la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
\frac{b_f}{2t_f} &\leq \frac{65}{\sqrt{F_y}}, \\
\frac{b_f}{2t_f} = \frac{12.625}{(2)(1.75)} &\leq \frac{65}{\sqrt{36}}, \\
\frac{b_f}{2t_f} = 3.61 &\leq 10 \qquad \text{Cumple.}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

El resultado anterior indica que la sección es compacta.

Cálculo de la longitud crítica no arriostrada

Una vez que se hemos establecido el tipo de sección se continúa la solución del problema calculando la longitud crítica no arriostrada, la cual estará determinada por el menor valor que resulte de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
L_c &= \begin{cases} \frac{76b_f}{\sqrt{F_y}} \\ \\ \frac{20000}{\frac{F_y d}{b_f t_f}} \end{cases}, \\
L_c &= \begin{cases} \frac{(76)(12.625)}{\sqrt{36}} \\ \\ \frac{20000}{\frac{(36)(14.375)}{(12.625)(1.75)}} \end{cases}, \\
L_c &= \begin{cases} 160 \text{ plg} & \text{Rige} \\ \\ 854 \text{ plg} \end{cases}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Como no se está indicando que la columna tenga algún tipo de arriostramiento lateral entre sus apoyos extremos, la longitud $L_c = 160$ plg, se compara directamente con la longitud total de la columna, $L = 168$ plg; de esta comparación resulta que $L > L_c$.

Cálculo del radio de giro r_T

El hecho de que $L > L_c$ implica la posibilidad de que el esfuerzo admisible por flexión alrededor del eje con mayor momento de inercia de la sección transversal esté determinado por el pandeo lateral del patín a compresión de la columna. Para establecer con precisión si esta posibilidad es un hecho real, es necesario calcular el radio de giro r_T, el cual se define como *el radio de giro alrededor del eje con menor momento de inercia de la sección transversal, de una porción de la misma que estará conformada por el patín a compresión y un tercio del alma a compresión.* Los cálculos se muestran a continuación.

$$
\begin{aligned}
A_T &= b_f t_f + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\left(d - 2t_f\right), \\
A_T &= (12.625)(1.75) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\big(14.375 - (2)(1.75)\big), \\
A_T &= 22.1 + 1.81, \\
A_T &= 23.9 \text{ plg}^2. \qquad (1.15)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_T &= \frac{1}{12} t_f b_f^3 + \frac{1}{12}\big(\frac{1}{3}\frac{1}{2}\left(d - 2t_f\right)\big) t_w^3, \\
I_T &= \left(\frac{1}{12}\right)(1.75)(12.625^3 + \\
&+ \left(\frac{1}{12}\right)\left(\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\big(14.375 - (2)(1.75)\big)\right)(1.0625)^3, \\
I_T &= 293 + 0.812, \\
I_T &= 294 \text{ plg}^4. \qquad (1.16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_T &= \sqrt{\frac{I_T}{A_T}}, \\
r_T &= \sqrt{\frac{294}{23.9}}, \\
r_T &= 3.51 \text{ plg}. \qquad (1.17)
\end{aligned}
$$

Cálculo de C_b

A continuación se calcula el valor de C_b con base en los momentos aplicados en los extremos arriostrados del elemento. Como se hemos venido mencionando, la columna no tienen ningún tipo de arriostramiento intermedio entre sus extremos, por lo que los momentos a considerarse serán precisamente los aplicados en sus apoyos superior e inferior. De lo anterior se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
M_1 = &= 60 \text{ klb} \cdot \text{pie}, && (1.18)\\
M_2 = &= 80 \text{ klb} \cdot \text{pie}. && (1.19)\\
& && (1.20)
\end{aligned}
$$

La dirección de estos momentos hacen que la columna se flexione en curvatura simple, por lo que el valor del cociente $\frac{M_1}{M_2}$ se considerará como negativo. El cálculo del valor de C_b se muestra a continuación:

$$
\begin{aligned}
C_b &= 1.75 + 1.05\frac{M_1}{M_2} + 0.30\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2 \leq 2.3,\\
C_b &= 1.75 + (1.05)\left(-\frac{60}{80}\right) + (0.30)\left(-\frac{60}{80}\right)^2 \leq 2.3,\\
C_b &= 1.75 + (1.05)\,(-0.75) + (0.30)\,(-0.75)^2 \leq 2.3,\\
C_b &= 1.75 - 0.79 + 0.17,\\
C_b &= 1.13\ . && (1.21)
\end{aligned}
$$

Cálculo de F_{b1}

Una vez calculados los valores de r_T y C_b se calcula el valor de F_{b1} con base en la siguiente ecuación:

$$
F_{b1} = \begin{cases}
0.60F_y & \text{si } 0 \leq \frac{L}{r_T} < \sqrt{\frac{102000C_b}{F_y}},\\
\left[\frac{2}{3} - \frac{F_y\left(\frac{L}{r_T}\right)^2}{1530\times 10^3 C_b}\right]F_y & \text{si } \sqrt{\frac{102000C_b}{F_y}} \leq \frac{L}{r_T} < \sqrt{\frac{510000C_b}{F_y}},\\
\frac{170000C_b}{\left(\frac{L}{r_T}\right)^2} & \text{si } \sqrt{\frac{510000C_b}{F_y}} \leq \frac{L}{r_T}.
\end{cases} \qquad (1.22)
$$

Para determinar cuál de los tres casos define a F_{b1} se hacen los siguientes cálculos:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{102000C_b}{F_y}} &= \sqrt{\frac{(102000)(1.13)}{36}}, \\
\sqrt{\frac{102000C_b}{F_y}} &= \sqrt{\frac{115000}{36}}, \\
\sqrt{\frac{102000C_b}{F_y}} &= \sqrt{3200}, \\
\sqrt{\frac{102000C_b}{F_y}} &= 57\ . \qquad (1.23)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{510000C_b}{F_y}} &= \sqrt{\frac{(510000)(1.13)}{36}}, \\
\sqrt{\frac{510000C_b}{F_y}} &= \sqrt{\frac{576000}{36}}, \\
\sqrt{\frac{510000C_b}{F_y}} &= \sqrt{1600}, \\
\sqrt{\frac{510000C_b}{F_y}} &= 130\ . \qquad (1.24)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{L}{r_T} &= \frac{168}{3.51}, \\
\frac{L}{r_T} &= 47.9\ . \qquad (1.25)
\end{aligned}
$$

Los cálculos anteriores nos permiten ver que $\frac{L}{r_T} < \sqrt{\frac{102000C_b}{F_y}}$, por lo que F_{b1} es igual a:

$$
\begin{aligned}
F_{b1} &= 0.60F_y, \\
F_{b1} &= 22\ \frac{\text{klb}}{\text{plg}^2}. \qquad (1.26)
\end{aligned}
$$

אב

Cálculo de F_{b2}

Por otro lado, el valor de F_{b2} se calcula con base en la siguiente ecuación:

$$F_{b2} = \begin{cases} 0.60F_y & \text{si } 0 \leq \frac{Ld}{b_f t_f} < \frac{20000C_b}{F_y}, \\ \frac{12000C_b}{\left(\frac{Ld}{b_f t_f}\right)} & \text{si } \frac{20000C_b}{F_y} \leq \frac{Ld}{b_f t_f}. \end{cases} \tag{1.27}$$

Para determinar cuál de los tres casos define a F_{b2} se hacen los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \frac{20000C_b}{F_y} &= \frac{(20000)(1.13)}{36}, \\ \frac{20000C_b}{F_y} &= \frac{22600}{36}, \\ \frac{20000C_b}{F_y} &= 630\ . \end{aligned} \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned} \frac{Ld}{b_f t_f} &= \frac{(168)(14.375)}{(12.625)(1.75)}, \\ \frac{Ld}{b_f t_f} &= \frac{2420}{22.1}, \\ \frac{Ld}{b_f t_f} &= 110\ . \end{aligned} \tag{1.29}$$

Los cálculos anteriores nos permiten ver que $\frac{Ld}{b_f t_f} < \frac{20000C_b}{F_y}$, por lo que F_{b2} es igual a:

$$\begin{aligned} F_{b2} &= 0.60F_y, \\ F_{b2} &= 22\ \frac{\text{klb}}{\text{plg}^2}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Determinación de F_b

El valor que debe considerarse para el esfuerzo admisible por flexión alrededor del eje de mayor momento de inercia de la sección transversal, es el que resulte mayor entre F_{b1} y F_{b2}, pero como en este caso particular ambos son iguales, el valor de este esfuerzo es igual a:

$$F_b = 22\ \frac{\text{klb}}{\text{plg}^2}. \tag{1.31}$$